Limites e Continuidade

Gláucio Terra

glaucio@ime.usp.br

Departamento de Matemática

IME - USP

Revisão

Limite de uma Função num Ponto

DEFINIÇÃO Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0, L \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

significa: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

Regras para Calcular Limites

- $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$
- $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f \pm g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x)^n\right) = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right)^n$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$

Continuidade

DEFINIÇÃO Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Diz-se que f é contínua em x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Isto é equivalente a:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Continuidade

DEFINIÇÃO Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Diz-se que f é contínua em x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Isto é equivalente a:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Diz-se que f é contínua se for contínua em todos os pontos do seu domínio.

Exemplos de Funções Contínuas

- Funções polinomiais;

Exemplos de Funções Contínuas

- Funções polinomiais;
- Funções racionais;

Exemplos de Funções Contínuas

- Funções polinomiais;
- Funções racionais;
- Funções trigonométricas;

Exemplos de Funções Contínuas

- Funções polinomiais;
- Funções racionais;
- Funções trigonométricas;
- Funções raízes;

Exemplos de Funções Contínuas

- Funções polinomiais;
- Funções racionais;
- Funções trigonométricas;
- Funções raízes;
- Soma, diferença, produto, quociente de funções contínuas são funções contínuas;

Exemplos de Funções Contínuas

- Funções polinomiais;
- Funções racionais;
- Funções trigonométricas;
- Funções raízes;
- Soma, diferença, produto, quociente de funções contínuas são funções contínuas;
- Composta de funções contínuas é contínua.

Limites Laterais, Limites no Infinito, Limites Infinitos

Limites Laterais

Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0, L \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

significa:

Limites Laterais

Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0, L \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

significa: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

Limites Laterais

Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0, L \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

significa: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

significa: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A : 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

Limite de uma função num ponto e limites laterais

Limite de uma função num ponto e limites laterais

TEOREMA Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0, L \in \mathbb{R}$. Suponha que exista $a > 0$ tal que $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - x_0| < a\} \subset A$. Então, são equivalentes:

Limite de uma função num ponto e limites laterais

TEOREMA Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0, L \in \mathbb{R}$. Suponha que exista $a > 0$ tal que $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - x_0| < a\} \subset A$. Então, são equivalentes:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$;

Limite de uma função num ponto e limites laterais

TEOREMA Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0, L \in \mathbb{R}$. Suponha que exista $a > 0$ tal que $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - x_0| < a\} \subset A$. Então, são equivalentes:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$;
- $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

Limites no Infinito

Limites no Infinito

DEFINIÇÃO Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

significa:

Limites no Infinito

DEFINIÇÃO Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

significa:

$$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in A : x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Limites no Infinito

DEFINIÇÃO Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

significa:
$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in A : x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa: $\forall \epsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in A : x < -M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

Regras para Cálculo de Limites Laterais e Limites no Infinito

Regras para Cálculo de Limites Laterais e Limites no Infinito

Valem as mesmas regras já vistas para o cálculo do limite de uma função num ponto, bastando substituir-se "$\lim_{x\to x_0}$" por "$\lim_{x\to x_0^+}$" ou "$\lim_{x\to x_0^-}$" ou "$\lim_{x\to +\infty}$" ou "$\lim_{x\to -\infty}$".

Limites Infinitos

Limites Infinitos

DEFINIÇÃO Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0, L \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

significa:

Limites Infinitos

DEFINIÇÃO Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0, L \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

significa: $\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

Limites Infinitos

DEFINIÇÃO Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0, L \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

significa: $\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

significa: $\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$

Limites Infinitos

OBSERVAÇÃO: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ significa, em particular, $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Exercícios

Exercício 1

Calcule:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^4 + x^3 - x^2 + 1}{2x^4 + 6x^2 + 3}$$

Exercício 2

Calcule:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^4 + x^3 - x^2 + 1}{x^3 + 6x^2 + 3}$$

Exercício 3

Um tanque contém 5000 litros de água pura. Salmoura contendo 30 g de sal por litro de água é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 25 l/min. Encontre uma função $C : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ que descreva a concentração da solução em função do tempo em minutos. Calcule, caso exista, $\lim_{t\to\infty} C(t)$.