Questão 1. (3 pontos) Seja $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+3x^2}}{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-x+1}}$.

a) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calcule $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$. O que se pode dizer sobre $\lim\limits_{x\to0} f(x)$?

c) Seja $g\colon]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} |x|\, f(x), & \text{se } x \neq 0; \\ c, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Existe algum valor $c \in \mathbb{R}$ tal que g seja contínua em $x=0$? E derivável (em $x=0$)? Justifique.

a) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\sqrt{1+3/x^2}}{x\left(\sqrt{2+1/x^2}-\sqrt{1-1/x+1/x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to+\infty}\ \underbrace{\frac{\sqrt{1+3/x^2}}{\sqrt{2+1/x^2}-\sqrt{1-1/x+1/x^2}}}_{\to\frac{1}{\sqrt2-1}} = +\infty$$

b) $$f(x) = \frac{\sqrt{x^4+3x^2}}{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-x+1}} \cdot \frac{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{|x|\sqrt{x^2+3}\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{2x^2+1-x^2+x-1}$$

$$= \frac{|x|}{x}\ \frac{\sqrt{x^2+3}\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{x+1}$$

Logo, $$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x^2+3}\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{x+1} = 2\sqrt3$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} -\frac{\sqrt{x^2+3}\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{x+1} = -2\sqrt3.$$

Como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

c) $$\lim_{x\to0} g(x) = \lim_{x\to0} \frac{x\sqrt{x^2+3}\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{x+1} = 0.$$

Portanto, devemos ter $c=0$, para que g seja contínua.

Neste caso,

$$\lim_{x\to0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x^2+3}\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{x+1} = 2\sqrt3.$$

Isto é, g é derivável em $x=0$, se $c=0$. (e $f'(0)=2\sqrt3$) (*)

(Para $c\neq0$, g não é derivável em $x=0$, pois não é contínua nesse ponto)

(*) outra solução para g derivável em $x=0$, se $c=0$:

Se $c=0$ então $g(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+3}\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{x+1}$, para todo $x\in\,]-1,+\infty[$ (inclusive p/ $x=0$), que é derivável em $x=0$, pelas regras de derivação (soma, produto, quociente e composta de funções deriváveis)