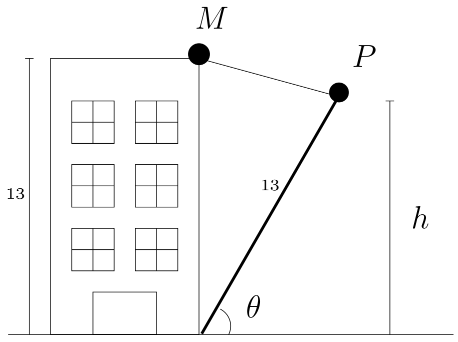
**Questão 3.** (2,5 pontos) Um guindaste é montado conforme a figura. A extremidade $P$ é presa a um cabo que é desenrolado pelo motor $M$. Quando $P$ está a 5 m do solo, a taxa de variação instantânea com que o cabo é desenrolado é de 0,5 m/s. Calcule:

a) a taxa de variação da altura $h$ nesse instante;

b) a taxa de variação do ângulo $\theta$ nesse mesmo instante.




(a) Se $x(t)$ é a distância do ponto $P$ até a parede do prédio no instante $t$ e $z(t)$ a distância de $M$ a $P$ neste mesmo instante, temos que

$$x^2(t) + h^2(t) = 13^2 \qquad \text{e} \qquad z(t) = \sqrt{x^2(t) + \big(13 - h(t)\big)^2}$$

Substituindo, obtemos que

$$z(t) = \sqrt{13^2 - x^2(t) + (13 - h(t))^2} = \sqrt{26(13 - h(t))} = \sqrt{26} \cdot \sqrt{13 - h(t)}$$

Derivando, obtemos que

$$z'(t) = \sqrt{26} \cdot \frac{-h'(t)}{2\sqrt{13 - h(t)}} = \frac{-\sqrt{26}}{2} \cdot \frac{h'(t)}{\sqrt{13 - h(t)}}$$

Seja $t_0$ o instante ao qual o enunciado se refere. Então $h(t_0) = 5$ e $z'(t_0) = 0,5$ e portanto

$$0,5 = \frac{-\sqrt{26}}{2} \cdot \frac{h'(t_0)}{\sqrt{8}}.$$

Logo, $h'(t_0) = -\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{26}} = -2\dfrac{\sqrt{13}}{13}.(m/s)$

(b) Como $\sin\theta(t) = \dfrac{h(t)}{13}$, derivando obtemos que

$$\cos\theta(t) \cdot \theta'(t) = \frac{h'(t)}{13}. \ (*)$$

No instante $t_0$ pedido, temos que $x(t_0) = 12$ e portanto $\cos\theta(t_0) = \frac{12}{13}$. Assim, substituindo em $(*)$

$$\frac{12}{13}\theta'(t_0) = -2\frac{\sqrt{13}}{13} \cdot \frac{1}{13},$$

e portanto

$$\theta'(t_0) = -\frac{\sqrt{13}}{78}.(rad/s)$$