

Questão 4. (1,5 ponto) Considere a função $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$. Determine todas as retas tangentes ao gráfico de f que passam pelo ponto $(1, 0)$.

Resolução: Temos que $f'(x) = \frac{2x(x - 1) - (x^2 + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}$.

A reta tangente ao gráfico em um ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada por

$$t_{x_0}: y - \frac{x_0^2 + 1}{x_0 - 1} = \frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0), \quad x_0 \neq 1.$$

Queremos encontrar x_0 tal que $(1, 0)$ satisfaça a equação de t_{x_0} :

$$-\frac{x_0^2 + 1}{x_0 - 1} = \frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{(x_0 - 1)^2}(1 - x_0) \stackrel{x_0 \neq 1}{\iff} x_0^2 + 1 = x_0^2 - 2x_0 - 1 \iff x_0 = -1.$$

Assim, a reta pedida é a tangente em $x_0 = -1$:

$$y + 1 = \frac{2}{4}(x + 1),$$

ou seja,

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$