

Lista 0 de MAT 2453 - POLI - 2009

1. Você já deve ter aprendido que o número $\sqrt{2}$ é irracional. Isto é, ele *não* pode ser representado por uma fração $\frac{p}{q}$ com p e q números inteiros e $q \neq 0$. Você sabe provar isso?

Daremos aqui um esboço da demonstração. Este é um exemplo de uma demonstração *por absurdo*:

“Suponha que existam números inteiros p e q com $q \neq 0$ e $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$. Podemos supor que p e q são números *primos entre si*. Então $p^2 = 2q^2$. Logo p é par, ou seja, $p = 2k$ para algum inteiro k . Mas isto implica que $4k^2 = 2q^2$ e então $q^2 = 2k^2$. Portanto q é par. Chegamos assim a uma contradição, pois supusemos que p e q são primos entre si. Esta contradição prova a afirmação que $\sqrt{2}$ é irracional.”

Preencha todos os detalhes desta demonstração. Se p é um número primo qualquer, você é capaz de provar que \sqrt{p} é irracional?

2. Resolva as inequações:

(a) $x(2x - 1)(x + 1) > 0$ (b) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \leq 0$
 (c) $(x + 1000)^2 \geq x + 1000$ (d) $|4 - x^2| \leq \frac{x + 7}{2}$

3. Decida quais afirmações são verdadeiras:

(a) $x - 1 < 3 \Leftrightarrow (x - 1)^2 < 9$
 (b) $\frac{x - 1}{x - 2} > 2 \Leftrightarrow \frac{x - 2}{x - 1} < \frac{1}{2}$
 (c) $\frac{1}{x} > 3 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$ e $x \neq 0$
 (d) se $x \neq 2$, $\frac{x^2 + x + 1}{x - 2} > 3 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 > 3(x - 2)$
 (e) $(x^2 - 5)^2 < 4(x^2 + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 5 < 2(x^2 + 1)$

4. Resolva os sistemas:

(a) $\begin{cases} xy = x \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y^2 = x + 1 \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

5. Esboce o gráfico de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x) = |x|$ (b) $f(x) = |x^2 - 4|$ (c) $f(x) = |\sen x|$
 (d) $f(x) = x - |x|$ (e) $f(x) = |3x + 5|$ (f) $f(x) = 3 \cos(2x)$
 (g) $f(x) = \sqrt{x + 3}$ (h) $f(x) = \text{tg}(x + \pi/2)$ (i) $f(x) = x^3 - 9$
 (j) $f(x) = (x + 5)^4 - 3$ (k) $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x + 6}{x + 3}$ (l) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 5 & \text{se } x = 1 \end{cases}$
 (m) $f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 9} + 2$ (n) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (o) $f(x) = \sqrt{-x}$

6. Resolva as inequações:

(a) $|\sen x| > \frac{1}{2}$ (b) $|x^2 - 4| > 2|x^2 - 1|$

7. Tente esboçar o gráfico de:

(a) $f(x) = x \sen x$ (b) $f(x) = \sen \frac{1}{x}$ (c) $f(x) = x \sen \frac{1}{x}$ (d) $f(x) = \frac{\sen x}{x}$