MAT2453 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I

1º Semestre de 2009 - 2ª Lista de Exercícios

1. Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de
$$f(x) = x^3 - 2x + 1 \;\text{ e }\; g(x) = -x + 1,$$
com $-1 \leq x \leq 1$.

2. Desenhe a região $A = B \cap C \cap D$ e calcule a área de A, onde
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq x^2 - 4\},\; C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq 12 - 3x^2\} \text{ e}$$
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq 3x^2 + 12x + 12\}.$$

3. Desenhe a região
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq x^2 - 1,\; y \leq x + 1 \text{ e } y \geq -x^2 - 3x - 2\}$$
e calcule a sua área.

4. Sejam $f : [-1,3] \to \mathbb{R}$ contínua com $f(x) \leq 0$, para todo $x \in [-1,3]$,
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 3 \text{ e } y \geq f(x)\} \;\text{ e }\; B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 3 \text{ e } y \leq x^2 + 3\}$$
tais que a área de $A \cap B$ seja igual a 23. Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$.

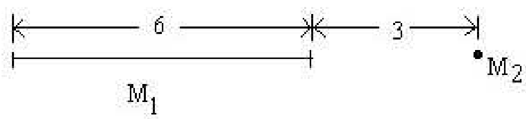
5. Determine $m > 0$ para que a área delimitada por $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{2}$ e a reta $y = mx$ seja igual a 4.

6. Desenhe a região do plano delimitada pela curva $y = x^3 - x$ e por sua reta tangente no ponto de abscissa $x = -1$. Calcule a área desta região.

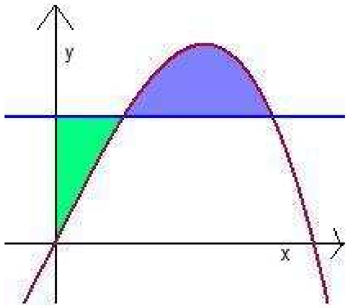
7. Encontre a área da região limitada entre as curvas $x = y^3 - y$ e $x = 1 - y^4$.

8. Calcule $\displaystyle\int_0^1 (x + \sqrt{1 - x^2})\,\mathrm{d}x$, interpretando-a como uma área.

9. Sabe-se que a intensidade da força de atração entre duas partículas é dada por
$$F = \frac{C m_1 m_2}{d^2}$$
onde C é uma constante, m_1 e m_2 são as massas das partículas e d é a distância entre elas. Uma barra linear homogênea de massa $M_1 = 18kg$ e uma massa pontual $M_2 = 2kg$ estão dispostas como na figura. Calcule a intensidade da força de atração entre as duas massas.



10. A reta horizontal $y = c$ intercepta a curva $y = 2x - 3x^3$ no primeiro quadrante como mostra a figura. Determine c para que as áreas das duas regiões sombreadas sejam iguais.



11. Sejam $f(x) = x^3 + 5x - 6$ e g a função inversa de f. Calcule $g'(x)$, $g''(x)$ em termos de $g(x)$. Calcule $g''(0)$.

12. Sejam $y = f(x)$ dada por $f(x) = x^3 + \ln x$, $x > 0$ e $x = g(y)$ sua função inversa. Calcule $g'(y)$ em termos de $g(y)$. Calcule $g'(1)$.

13. Seja $h(x) = 2x + \cos x$.

    (a) Mostre que h é bijetora.

    (b) Calcule $h^{-1}(1)$.

    (c) Admitindo h^{-1} derivável, determine $(h^{-1})'(1)$.

14. Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ com $0 \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função injetora tal que $(x, f(x))$ é solução da equação $y^5 + ye^x + 3xe^{y+1} + 2 = 7 \operatorname{sen} x$, para todo $x \in I$. Seja g a inversa de f. Supondo que f e g são funções deriváveis, determine a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa -1.

15. Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ com $I \subset]-5, 1[$ e $f : I \to \mathbb{R}$ derivável tais que $(x, f(x))$ é solução da equação $2xy - 3x^2 + \operatorname{arctg}(y^2) + 27 = 0$, para todo $x \in I$. Determine a equação da reta que é normal ao gráfico de f e paralela à reta $3y + x = 1$.

16. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

(a) $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$	(b) $\operatorname{senh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$	(c) $f(x) = e^{e^x}$
(d) $f(x) = x^e + e^x$	(e) $f(x) = e^{1/x^2} + \frac{1}{e^{x^2}}$	(f) $f(x) = \ln(e^x + 1)$
(g) $f(x) = (\ln x)^2 + (1 + 2^{x^3})^x$	(h) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$	(i) $f(x) = x^\pi + \pi^x$
(j) $f(x) = 2^{x^2} + 3^{2x}$	(k) $f(x) = \ln(\operatorname{arctg} x)$	(l) $f(x) = \left(1 + \cos^2 x\right)^{\operatorname{sen} x}$
(m) $f(x) = (e^x + 3x)^{\operatorname{arcsen}(x^2)}$	(n) $f(x) = (3 + \cos x)^{\operatorname{tg}(x^2)}$	(o) $f(x) = \dfrac{\ln(x^3 + 2^{x^3})}{x^2 + e^{\cos x}}$
(p) $f(x) = (x^2 + 1)^{\operatorname{sen}(x^5)}$	(q) $f(x) = (1 + \operatorname{arctg} x^2)^{1/x^4}$	(r) $f(x) = x^2 e^{\operatorname{arctg} x}$
(s) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{arctg}(3x)}$	(t) $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$	

17. Use o TVM para provar as seguintes desigualdades:

    (a) $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b - a|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

    (b) $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \frac{1}{2}|a - b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \geq 1$ e $b \geq 1$.

    (c) $\left|\ln \frac{a}{b}\right| \leq |a - b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \geq 1$ e $b \geq 1$.

(d) $b^b - a^a > a^a(b-a)$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ com $1 \leq a < b$.

(e) $e^x - e^y \geq x - y$, para todos x, y com $x \geq y \geq 0$.

18. Seja $f(x) = x^5 + x^3 + 2x + 1$ e seja g a sua inversa. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Mostre que

$$g(b) - g(a) \leq \frac{1}{2}(b-a).$$

19. Seja f uma função derivável no intervalo $]-1, +\infty[$. Mostre que se $f(0) = 0$ e $0 < f'(x) \leq 1$, para todo $x > 0$, então $0 < f(x) \leq x$, para todos $x > 0$.

20. Mostre que $f(x) = (1+x)^{1/x}$ é estritamente decrescente para $x > 0$. Conclua que

$$(1+\pi)^e < (1+e)^\pi.$$

21. Prove as seguintes desigualdades:

(a) $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$, para todo $x > 1$

(b) $e^\pi > \pi^e$

(c) $\dfrac{\operatorname{tg}\, b}{\operatorname{tg}\, a} > \dfrac{b}{a}$ para $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$

(d) $x - \dfrac{x^3}{3!} < \operatorname{sen} x < x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$, para $x > 0$

(e) $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$, para $x > 0$

(f) $2x \operatorname{arctg} x > \ln(1+x^2)$, para $x > 0$

22. Seja f derivável em $\mathbb{R}$ e seja g dada por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$. Suponha que x_0 é ponto de máximo local de g. Prove que

$$x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0.$$

Prove que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0 passa pela origem.

23. Determine a constante a para que $f(x) = x^2 + \dfrac{a}{x}$ tenha:

(a) um mínimo local em $x = 2$.

(b) um mínimo local em $x = -3$.

(c) Mostre que f não terá máximo local para nenhum valor de a.

24. Calcule, caso exista

(a) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{\ln(1-2x)}{\operatorname{tg}(\pi x)}$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x^{100}}{\sqrt[5]{x}}$

(c) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} (\ln x)^{(x-1)}$

(e) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^{2x}}$

(f) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{e^{x^2}}$

(g) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^p \ln x$, $p > 0$

(h) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x \operatorname{sen}\left(\frac{p}{x}\right)$

(i) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2}\right)$

(j) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{e^x - 1}\right]$

(k) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (x \operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$

(l) $\displaystyle\lim_{x \to 0} (e^x + 3x)^{1/x}$

(m) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^{\operatorname{tg}(x^2)}$

(n) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left[\frac{1}{x} + \ln x\right]$

(o) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg}(2x^2)}{\ln(1+3x^2)}$

(p) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x \operatorname{arctg} x}$

(q) $\displaystyle\lim_{x \to 0} (1 + \operatorname{sen} 2x)^{1/\operatorname{sen} x}$

(r) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen}\, x + 2x^2}{e^x + e^{-x} - 2}$

(s) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (\operatorname{tg} x \sec x - \sec^2 x)$

(t) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^{\ln 2/(1+\ln x)}$

(u) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (1+3x)^{1/\ln x}$

(v) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{1/\ln x}$

(w) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left[\ln(x+3)^{x+4} - \ln(x+2)^{x+4}\right]$

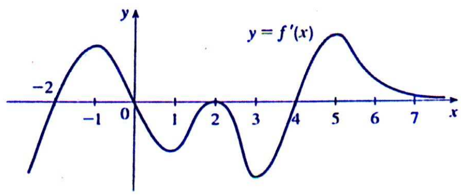
25. Determine c para que a função $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + c$ tenha uma única raiz real.

26. Mostre que a equação $3x - 2 + \cos(\frac{\pi x}{2}) = 0$ tem exatamente uma raiz real.

27. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{ax - 1}{ax + 1} \right)^x = 4$. Determine a.

28. (a) Esboce o gráfico de $f(x) = x^2 e^{-x}$.
(b) Determine, em função de k, o número de soluções reais da equação $ke^x = x^2$.

29. Seja f uma função cuja derivada tem o gráfico esboçado na figura abaixo:



(a) Em que intervalos f é crescente ou decrescente?
(b) Para quais valores de x f tem um máximo ou mínimo local?
(c) Em que intervalos f tem concavidade para cima ou para baixo?
(d) Ache os pontos de inflexão de f.
(e) Admitindo que $f(0) = 0$, faça um esboço do possível gráfico de f.

30. (a) Ache o ponto de mínimo de $f(x) = \frac{e^x}{x}$ no intervalo $]0, +\infty[$.
(b) Prove que $\frac{e^{a+b}}{ab} \geq e^2$, para todos $a > 0$ e $b > 0$.

31. Seja f uma função. Se existir uma reta $y = mx + n$ tal que $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$, dizemos que $y = mx + n$ é uma **assíntota** para f. Prove que a reta $y = mx + n$ é uma assíntota para f se, e somente se, $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ e $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = n$. (Tudo o que dissemos para $x \to +\infty$ vale também para $x \to -\infty$.)

32. Esboce o gráfico das funções abaixo e dê as equações das assíntotas, quando existirem.

(a) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$
(b) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$
(c) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$
(d) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$
(e) $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 4}$
(f) $f(x) = (3 - \frac{6}{x})e^{\frac{2}{x}}$
(g) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$
(h) $f(x) = e^x - e^{3x}$
(i) $f(x) = x - 3\ln x - \frac{2}{x}$
(j) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
(k) $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$
(l) $f(x) = x^x$
(m) $f(x) = \ln(2x) - \ln(3x^2 + 3)$
(n) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$
(o) $f(x) = \frac{(x-2)^3}{x^2}$
(p) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2}$
(q) $f(x) = \operatorname{arctg}(\ln x)$
(r) $f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x^2}$
(s) $f(x) = x^2 \ln x$
(t) $f(x) = \frac{e^x}{x}$
(u) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

33. Achar os valores máximo e mínimo de:

    (a) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x,\ x \in [0, \pi]$.
    (b) $f(x) = \sqrt{3 + 2x - x^3}$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.
    (c) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$.
    (d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$, $-1 \leq x \leq 2$.
    (e) $f(x) = |x^4 - 2x^3|$, $0 \leq x \leq 3$.

34. Para que números positivos a a curva $y = a^x$ corta a reta $y = x$?

35. Seja $f(x)$ um polinômio de grau 3, com três raízes reais distintas. Mostre que f tem um ponto de inflexão, que é a média aritmética das três raízes.

36. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) = f(b) = 0$. Mostre que se $f'(a)f'(b) > 0$, então existe c entre a e b tal que $f(c) = 0$.

37. Para que valores de k a equação $2x^3 - 9x^2 + 12x = k$ tem três raízes reais distintas ?

38. Suponha que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ seja contínua, $f(0) = 1$ e que $f(x)$ é um número racional para todo $x \in [0,1]$. Prove que $f(x) = 1$, para todo $x \in [0,1]$.

39. Seja $f(x) = x^7 + 8x^3 - x^5 - 8x$. Prove que $f'(x)$ tem duas raízes distintas no intervalo $]-1,1[$.

40. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável e seja $a \in \mathbb{R}$ fixado. Verifique se as afirmações são **verdadeiras** ou **falsas**. Justifique.

    (a) Se $f'(x) > 0$, para todo $x > a$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
    (b) Se f é derivável até segunda ordem com $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$, para todo $x > a$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
    (c) Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ então $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.
    (d) Se existe uma assíntota para f (quando $x \to +\infty$) com coeficiente angular m e se existe $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = L$, então $L = m$.
    (e) Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = m \in \mathbb{R},\ m \neq 0$ então f tem uma assíntota com coeficiente angular igual a m.

41. Suponha que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é contínua e que $0 \leq f(x) \leq 1$, para todo $x \in [0,1]$. Prove que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$.

42. Prove que se p é um polinômio, a equação $e^x - p(x) = 0$ não pode ter infinitas soluções reais.

43. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e com um único ponto crítico x_0. Prove que se x_0 for ponto de mínimo (máximo) local de f, então x_0 será o único ponto de mínimo (máximo) global de f.

44. No seu livro de Cálculo de 1696, l'Hôpital ilustrou sua regra com o limite da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

    quando $x \to a$, $a > 0$. Calcule este limite.

45. Considere a parábola $y = bx^2$ com $b \geq 1$.

    (a) Determine, em termos de b, a área da região compreendida entre essa parábola e a reta $y = x$, para $x \in [0,1]$.
    (b) Determine $b \in [1,3]$ de modo que a área seja máxima. Justifique!

Respostas

1. $\frac{1}{2}$ **2.** $\frac{104}{3}$ **3.** $\frac{107}{24}$ **4.** $-\frac{5}{3}$ **5.** $m = 2$ **6.** $\frac{27}{4}$ **7.** $\frac{8}{5}$ **8.** $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$ **9.** $\frac{4}{3}C$ **10.** $c = \frac{4}{9}$

11. $g''(0) = -\frac{3}{256}$

12. $g'(1) = \frac{1}{4}$

13. (b) 0; (c) $\frac{1}{2}$

14. $5y = 6x + 6$

15. $3y + x + 3 = 0$

23. (a) $a = 16$; (b) $a = -54$

24. (a) 0, (b) 0, (c) 0, (d) 1, (e) 0, (f) 0, (g) 0 (h) p, (i) $\frac{1}{6}$, (j) 1, (k) 1, (l) e^4, (m) 1

(n) $+\infty$, (o) $\frac{2}{3}$, (p) 1, (q) e^2, (r) 3, (s) $-\frac{1}{2}$, (t) 2, (u) e, (v) e, (w) 1.

25. $c < -27$ ou $c > 5$

27. $a = -\frac{1}{\ln 2}$

28. Não há soluções se $k < 0$; tem 1 solução se $k = 0$ ou $k > \frac{4}{e^2}$; tem 2 soluções se $k = \frac{4}{e^2}$; tem 3 soluções se $0 < k < \frac{4}{e^2}$.

30. (a) $x_0 = 1$

33. (a) -1; $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{\frac{17}{8}}$; $\sqrt{3+\sqrt{\frac{32}{27}}}$ (c) 4; 1 (d) $\sqrt[3]{-3}$; 0 (e) 0; 27

34. $a \leq e^{\frac{1}{e}}$

37. $4 < k < 5$

40. As afirmações (b) e (d) são **verdadeiras** e (a), (c) e (e) são **falsas**.

44. $\frac{16a}{9}$

45. (a) $A(b) = \frac{1}{3b^2} + \frac{b}{3} - \frac{1}{2}$; (b) $b = 3$