MAT2453- Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I - POLI

1o. Semestre de 2009 - 3a. Lista de Exercícios

I - Problemas de otimização: máximos e mínimos

1. Para que pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ a soma das distâncias a (2,0) e (-2,0) é mínima?

2. Achar os pontos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ mais próximos de (0,1).

3. Um triângulo isóceles está circunscrito a um círculo de raio R. Se x é a altura do triângulo, mostre que sua área é mínima quando $x = 3R$.

4. Qual é o menor valor da constante a para o qual a desigualdade $ax + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{2}$ é válida para todo número positivo x?

5. Seja $f(x) = 5x^2 + \dfrac{a}{x^5}$, $x > 0$, onde $a > 0$. Ache o menor valor de a de modo que $f(x) \geq 28$, $\forall x > 0$.

6. Um cilindro é obtido girando-se um retângulo ao redor do eixo x, onde a base do retângulo está apoiada. Seus vértices superiores estão sobre a curva $y = \dfrac{x}{x^2+1}$. Qual é o maior volume que tal cilindro pode ter?

7. Um arame de comprimento L deve ser cortado em 2 pedaços, um para formar um quadrado e outro um triângulo equilátero. Como se deve cortar o arame para que a soma das áreas cercadas pelos 2 pedaços seja (a) máxima? (b) mínima? Mostre que no caso (b) o lado do quadrado é 2/3 da altura do triângulo.

8. (a) Latas cilíndricas fechadas devem ser feitas com um volume V especificado. Qual é a razão entre a altura e o diâmetro da base que minimiza a quantidade de metal gasto para fazer a lata?

   (b) Por que as latas encontradas no mercado não são em geral como em (a)? Em geral o metal vem em uma chapa retangular. Não há desperdício envolvido em cortar a chapa que formará a superfície lateral, mas as tampas devem ser cortadas de uma peça quadrada, e as sobras, são desprezadas (ou então recicladas). Ache a razão entre a altura e o diâmetro de uma lata de volume V que minimiza o custo do material utilizado.

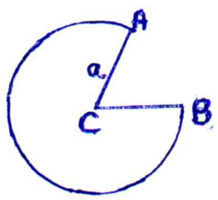
9. Um canhão situado no solo é posto sob um ângulo de inclinação θ. Seja r o alcance do canhão, isto é, a distância entre o canhão e o ponto de impacto da bala. Então r é dado por $r = \dfrac{2v^2}{g}\operatorname{sen}\theta\cos\theta$, onde v e g são constantes. Para que ângulo o alcance é máximo?

10. Determine o cone circular reto de maior volume que pode ser inscrito numa esfera de raio 3.

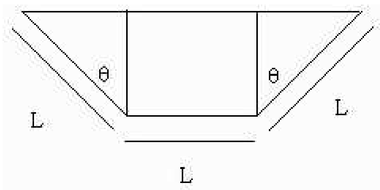
11. Deseja-se construir uma esfera e um cubo de modo que a soma das áreas de suas superfícies seja igual a 2. Determine o raio da esfera que maximiza e o que minimiza a soma de seus volumes.

12. Um muro de 2 metros de altura está a 1 metro de distância da parede lateral de um prédio. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apóiam uma na parede, e outra no chão do lado de fora do muro?

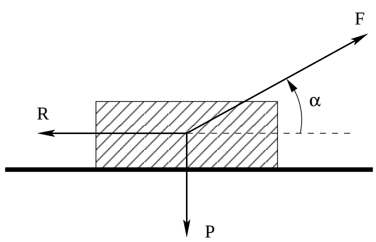
13. Um papel de filtro circular de raio a deve ser transformado em um filtro cônico cortando um setor circular e juntando as arestas CA e CB. Ache a razão entre o raio e a profundidade do filtro de capacidade máxima.



14. Um reservatório tem fundo horizontal e seção transversal como se mostra na figura. Achar a inclinação dos lados com a vertical de modo a obter a máxima capacidade.



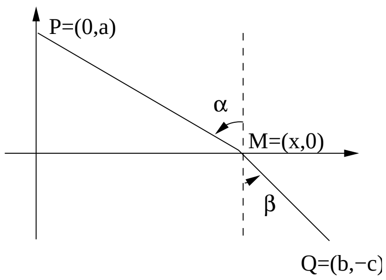
15. Um corpo de peso P apoiado sobre um plano horizontal deve ser deslocado horizontalmente pela aplicação de uma força de intensidade F. Qual o ângulo α com a horizontal deve formar a força para que a intensidade da mesma necessária para mover o corpo seja mínima, admitindo coeficiente de atrito $\mu > 0$?



OBSERVAÇÃO. Para cada $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ fixo, o valor mínimo da força F para movimentar o bloco é tal que a diferença entre a componente horizontal de F e a força de atrito R seja positiva, i.e. $F \cos\alpha - \mu(P - F \sin\alpha) \geqslant 0$, ou seja, $F \geqslant \frac{\mu P}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha}$.

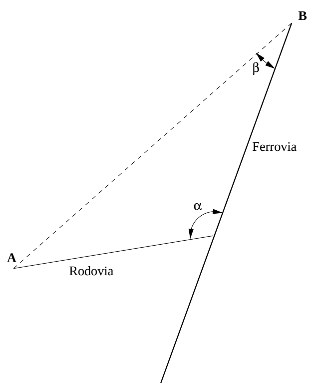
16. (Lei de Refração de Snellius) O objetivo desta questão é demonstrar como a *lei da refração de Snellius*, da Óptica Geométrica, pode ser obtida como conseqüência do *princípio de Fermat*, segundo o qual "a trajetória dos raios de luz é aquela que minimiza o tempo de percurso".

    Sejam $P \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano superior e $Q \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano inferior, fixos (vide figura abaixo). Uma partícula vai de P a um ponto $M = (x, 0)$ sobre o eixo Ox com velocidade constante u e movimento retilíneo; em seguida, vai de M até Q com velocidade constante v, também em movimento retilíneo. Seja $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $T(x)$ é o tempo de percurso de P a Q. Mostre que T possui um único ponto de mínimo $x_0 \in \mathbb{R}$. Verifique que $x_0 \in (0, b)$ e que, se $x = x_0$, então $\dfrac{\sin\alpha}{u} = \dfrac{\sin\beta}{v}$.



    Observação. A *lei da reflexão plana* também pode ser obtida como conseqüência do mesmo princípio (verifique!).

17. Deve-se construir uma estrada ligando uma fábrica A a uma ferrovia que passa por uma cidade B. Assumindo-se que a estrada e a ferrovia sejam ambas retilíneas, e que os custos de frete por unidade de distância sejam m vezes maiores na estrada do que na ferrovia, encontre o ângulo α a que a estrada deve ser conectada à ferrovia de modo a minimizar o custo total do frete da fábrica até a cidade. Assuma $m > 1$.



18. Um corredor de largura a forma um ângulo reto com um segundo corredor de largura b. Uma barra longa, fina e pesada deve ser empurrada do piso do primeiro corredor para o segundo. Qual o comprimento da maior barra que pode passar a esquina?

II - Integrais Indefinidas

Calcule as integrais indefinidas abaixo:

1. $\displaystyle\int \frac{x^7+x^2+1}{x^2}\,dx$
2. $\displaystyle\int e^{2x}\,dx$
3. $\displaystyle\int \cos 7x\,dx$
4. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$
5. $\displaystyle\int \frac{7}{x-2}\,dx$
6. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\,\sec^2 x\,dx$
7. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$
8. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$
9. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$
10. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$
11. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$
12. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$
13. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$
14. $\displaystyle\int \sec x\,dx$
15. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$
16. $\displaystyle\int x^2\sqrt[5]{x^3+1}\,dx$
17. $\displaystyle\int \frac{4x+8}{2x^2+8x+20}\,dx$
18. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$
19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\operatorname{arcsen} x)\ \sqrt{1-x^2}}$
20. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$
21. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$
22. $\displaystyle\int e^{x^3}x^2\,dx$
23. $\displaystyle\int e^x\sqrt[3]{1+e^x}\,dx$
24. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$
25. $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$
26. $\displaystyle\int 2x(x+1)^{2008}\,dx$
27. $\displaystyle\int x\,\operatorname{sen} x\,dx$
28. $\displaystyle\int e^x\,\cos x\,dx$
29. $\displaystyle\int x^r\,\ln x\,dx, r\in\mathbb{R}$
30. $\displaystyle\int (\ln x)^2\,dx$
31. $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx$
32. $\displaystyle\int x\operatorname{arctg} x\,dx$
33. $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\,dx$
34. $\displaystyle\int \sec^3 x\,dx$
35. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$
36. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,\cos^3 x\,dx$
37. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,\cos^2 x\,dx$
38. $\displaystyle\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$
39. $\displaystyle\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$
40. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+8x+20}$
41. $\displaystyle\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)^2(x-2)}\,dx$
42. $\displaystyle\int \frac{x^5+x+1}{x^3-8}\,dx$
43. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
44. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$
45. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

46. $\displaystyle\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$

47. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$

48. $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\ln x\;dx$

49. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$

50. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4}\,dx$

51. $\displaystyle\int \frac{3x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3}\,dx$

52. $\displaystyle\int \sqrt{a^2+b^2x^2}\,dx$

53. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}$

54. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x+2}\,dx$

55. $\displaystyle\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$

56. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

57. $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$

58. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x\;dx$

59. $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx$

60. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3\left(\frac{x}{2}\right)\cos^5\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$

61. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x\,\cos^3 x}$

62. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\;dx$

63. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,\cos^5 x\,dx$

64. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,\cos^4 x\;dx$

65. $\displaystyle\int \cos^6(3x)\,dx$

66. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^6 x}\,dx$

67. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\,\cos^4 x}$

68. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

69. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$
(Sugestão: faça $u=\sqrt[6]{x}$)

70. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)^2}\,dx$

71. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$

72. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$

73. $\displaystyle\int \frac{4x^2-3x+3}{(x^2-2x+2)(x+1)}\,dx$

74. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$

75. $\displaystyle\int \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,dx$

76. $\displaystyle\int x^5e^{-x^3}dx$

77. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)}\,dx$

III - Aplicações da Integral Definida

1. Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\operatorname{sen}(x^2+1)\,dx$.
2. Encontre o volume de uma pirâmide cuja base é o quadrado de lado L e cuja altura é h.
3. Calcule o volume do sólido cuja base é a astróide de equação $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ e tal que as seções transversais por planos paralelos ao plano Oxz são quadrados.
4. Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}+...+\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.
5. Calcule o comprimento do gráfico de $f(x)=\ln(\cos x)$, para $0\le x\le\frac{\pi}{4}$.
6. Calcule o comprimento da astróide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.
7. Calcule a área da região interna ao laço formado pela curva $y^2=x^2(x+3)$.

8. Calcule a área da região do plano limitada pela elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

9. Determine o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox do conjunto

   a) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le xy\le 2,\ x^2+y^2\le 5 \text{ e } x>0\}$.

   b) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\ge\sqrt{x} \text{ e } (x-1)^2+y^2\le 1\}$.

   c) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\ \le 2 \text{ e } e^{-x}\le y\le e^{x}\}$.

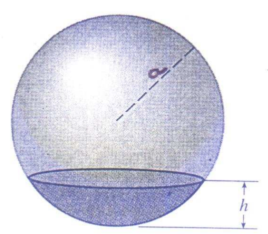
   d) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0,\ y\le 1 \text{ e } 1/x\le y\le 4/x^2\}$.

10. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $y=3$ da região delimitada pelas parábolas $y=x^2$ e $y=2-x^2$.

11. Seja $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\ \le 1 \text{ e } \ln(x+1)+2\le y\le e^x+4\}$. Determine o volume do sólido obtido pela rotação de A em torno da reta $y=2$.

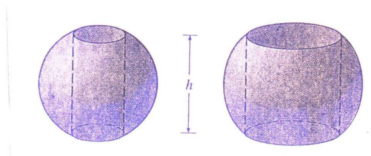
12. O disco $x^2+y^2\le a^2$ é girado em torno da reta $x=b$, com $b>a$, para gerar um sólido, com a forma de um pneu. Esse sólido é chamado **toro**. Calcule seu volume.

13. Calcule o volume de uma calota esférica de altura h, $h\le a$, de uma esfera de raio a.



14. Determine o comprimento da curva $y=\cosh x$, $-3\le x\le 4$.

15. Um anel esférico é o sólido que permanece após a perfuração de um buraco cilíndrico através do centro de uma esfera sólida. Se a esfera tem raio R e o anel esférico tem altura h, prove o fato notável de que o volume do anel depende de h, mas não de R.



IV - Miscelânea

1. *Problema de Buffon.* Num plano são traçadas linhas paralelas equidistantes. Joga-se neste plano uma agulha cujo comprimento é igual à distância entre as linhas. Calcule a probabilidade de que a agulha intercepte uma das linhas.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e periódica de período $2L$, isto é, $f(x + 2L) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Sejam $n \in \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{R}$. Mostre que
$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx = \frac{1}{L}\int_{a}^{a+2L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx.$$

3. Seja f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e sejam $u(x)$ e $v(x)$ funções diferenciáveis cujos valores estão em $[a, b]$. Prove que
$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}.$$
A fórmula acima é conhecida como *Regra de Leibnitz.*

4. Calcule $g'(x)$ onde

   (a) $g(x) = \displaystyle\int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} e^{t^2} dt$ (b) $g(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}(t^2) dt$

5. Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x\, \cos x}{x+1}\, dx$ em termos de $A = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2}\, dx$.

6. *Trabalho.* Quando uma **força constante** de intensidade F é aplicada na direção do movimento de um objeto e esse objeto é deslocado de uma distância d, definimos o **trabalho** W realizado pela força sobre o objeto por $W = F.d$, se a força age no sentido do movimento e por $W = -F.d$, se ela age no sentido oposto. Suponha agora que um objeto está se movendo na direção positiva ao longo do eixo x, sujeito a uma **força variável** $F(x)$. Defina o trabalho W realizado pela força sobre o objeto quando este é deslocado de $x = a$ até $x = b$, e encontre uma fórmula para calculá-lo.

7. *Energia cinética.* Use as notações do exercício anterior, a segunda lei de Newton e a regra da cadeia
$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$
para mostrar que o trabalho realizado por uma força F atuando sobre uma partícula de massa m que se moveu de x_1 até x_2 é
$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2,$$

onde v_1 e v_2 são as velocidades do corpo em x_1 e x_2. Em Física, a expressão $\frac{1}{2}mv^2$ é chamada de **energia cinética** de um corpo em movimento com velocidade v. Portanto, o trabalho realizado por uma força é igual à variação da energia cinética do corpo e podemos determinar o trabalho calculando esta variação.

8. Suponha que uma partícula se desloca ao longo do eixo $0x$, segundo uma função horária $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ e sob ação de uma força $f(x)\overrightarrow{i}$, dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Admita que a dinâmica da partícula é governada por um modelo relativístico: sua massa m depende da sua velocidade v, segundo a função $m : (-c, c) \to \mathbb{R}$ definida por (dados $c > 0$ velocidade da luz e $m_0 > 0$ massa de repouso):
$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$
e sua função horária x satisfaz a equação diferencial:
$$\frac{d}{dt}\big(m(x'(t))x'(t)\big) = f\big(x(t)\big).$$
Mostre que, se interpretarmos o trabalho $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$ realizado pela força f quando a partícula se desloca de $x_0 = x(t_0)$ a $x_1 = x(t_1)$ como variação de energia ΔE, e se $\Delta m = m\big(x'(t_1)\big) - m\big(x'(t_0)\big)$, então:
$$\Delta E = \Delta m\, c^2.$$
Sugestão: Use o teorema de mudança de variáveis na integral de Riemann e o teorema fundamental do cálculo.

9. Seja f uma função contínua em um intervalo I contendo a origem e seja
$$y = y(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(x - t)f(t)\,dt$$
Prove que $y'' + y = f(x)$ e $y(0) = y'(0) = 0$, para todo $x \in I$.

10. Determine o volume da intersecção de dois cilindros, ambos de raio R e cujos eixos são ortogonais.

11. Seja $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1 + t^3}\,dt$. Calcule $\displaystyle\int_0^2 xF(x)dx$ em termos de $F(2)$.

12. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos(t^2)\,dt}{\int_0^x e^{-t^2}\,dt}$.

13. Mostre que $f(x) = \displaystyle\int_0^{1/x} \frac{1}{t^2+1}\,dt + \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt$ é constante em $(0, \infty)$. Qual o valor dessa constante?

14. Mostre que $\dfrac{22}{7} - \pi \;=\; \displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx.$

15. Seja $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$.

 (a) Mostre que f é crescente e ímpar.

 (b) Mostre que $f(x) \leq f(1) + 1 - \dfrac{1}{x}$, para todo $x \geq 1$. (Sugestão: Integre $0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leq \frac{1}{t^2}$ de 1 a x.)

 (c) Mostre que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existe e é um número real positivo.

 (d) Esboce o gráfico de $f(x)$, localizando seu ponto de inflexão.

16. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto \frac{1}{x^2}$. Estude as integrais de Riemann impróprias:

 (a) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

 (b) $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$

17. Seja $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\frac{x^2-t^2}{2}}\,dt$. Mostre que $f'(x) - xf(1) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

18. Seja $F : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \displaystyle\int_1^x \sqrt{t^3-1}\,dt$.

 (a) Calcule o comprimento do gráfico de F entre $x = 1$ e $x = 4$.

 (b) Calcule $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{F(x^3) - F(8)}{\operatorname{sen}(x-2)}$

RESPOSTAS

I - Problemas de otimização: máximos e mínimos

1. $(5, 0)$ e $(-5, 0)$
2. $\left(\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}\,,\,\dfrac{1}{2}\right)$
4. $a = 2$
5. $a = 2^8$
6. $\frac{\pi}{4}$
7. (a) Deve-se formar apenas um quadrado; (b) o lado do quadrado é $\dfrac{\sqrt{3}L}{9+4\sqrt{3}}$.
8. (a) 1; (b) $4/\pi$
9. $\theta = \frac{\pi}{4}$
10. altura: 4; raio: $2\sqrt{2}$
11. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$; $\frac{1}{\sqrt{2\pi+12}}$
12. $\left(1+\sqrt[3]{4}\right)^{3/2}$
13. $\sqrt{2}$
14. $\theta = \dfrac{\pi}{6}$
15. $\operatorname{arctg}\mu$
17. $\pi - \max\{\beta, \arccos(\frac{1}{m})\}$
18. $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$

II - Integrais Indefinidas

1) $\frac{x^6}{6} + x - \frac{1}{x} + k$

2) $\frac{e^{2x}}{2} + k$

3) $\frac{1}{7}\text{sen}\, 7x + k$

4) $\text{tg}x - x + k$

5) $7\ln|x-2| + k$

6) $\frac{1}{4}\text{tg}^4 x + k$

7) $2\sqrt{\cos x}(\frac{1}{5}\cos^2 x - 1) + k$

8) $-\ln|\cos x| + k$

9) $\frac{1}{2}\text{tg}^2 x + \ln|\cos x| + k$

10) $\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + k$

11) $\frac{1}{2}\,\text{arctg}\, x^2 + k$

12) $x - \text{arctg}\, x + k$

13) $-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + k$

14) $\ln|\sec x + \text{tg}x| + k$

15) $2\sqrt{1+\ln x} + k$

16) $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+1)^6} + k$

17) $\ln(2x^2 + 8x + 20) + k$

18) $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + k$

19) $\ln|\text{arcsen}\, x| + k$

20) $\ln(1+e^x) + k$

21) $-\ln(1+\cos^2 x) + k$

22) $\frac{1}{3}e^{x^3} + k$

23) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+e^x)^4} + k$

24) $-2\cos\sqrt{x} + k$

25) $e^{\text{arctg}x} + k$

26) $2(x+1)^{2009}(\frac{x+1}{2010} - \frac{1}{2009}) + k$

27) $-x\cos x + \text{sen}\, x + k$

28) $\frac{1}{2}e^x(\text{sen}\, x + \cos x) + k$

29) $\begin{cases} \frac{x^{r+1}}{r+1}\ln x - \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + k, \text{ se } r \neq -1 \\ \frac{1}{2}(\ln x)^2 + k, \text{ se } r = -1 \end{cases}$

30) $x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + k$

31) $(-x-1)e^{-x} + k$

32) $\frac{x^2}{2}\,\text{arctg}\, x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\,\text{arctg}\, x + k$

33) $x\,\text{arcsen}\, x + \sqrt{1-x^2} + k$

34) $\frac{1}{2}\sec x\,\text{tg}\, x + \frac{1}{2}\ln\sec x + \text{tg}\, x| + k$

35) $\frac{1}{2}(x + \text{sen}\, x\cos x) + k$

36) $\frac{1}{3}\text{sen}^3 x - \frac{1}{5}\text{sen}^5 x + k$

37) $\frac{1}{8}(x - \frac{1}{4}\text{sen}\, 4x) + k$

38) $\ln|1 + \text{sen}\, x| + k$

39) $6\ln|x-1| - 25\ln|x-2| + 22\ln|x-3| + k$

40) $\frac{\sqrt{6}}{12}\text{arctg}(\frac{x+2}{\sqrt{6}}) + k$

41) $-22\ln|x-1| + \frac{12}{x-1} + 25\ln|x-2| + k$

42) $\frac{x^3}{3} + \frac{35}{12}\ln|x-2| + \frac{61}{24}\ln(1 + (\frac{x+1}{\sqrt{3}})^2) + \frac{\sqrt{3}}{12}\,\text{arctg}(\frac{x+1}{\sqrt{3}}) + k$

43) $\frac{1}{2}\,\text{arcsen}\, x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + k$

44) $\frac{x}{8}(2x^2-1)\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{8}\,\text{arcsen}\, x + k$

45) $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + k$

46) $x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + k$

47) $\ln|\sqrt{5-2x+x^2} + x - 1| + k$

48) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x - \frac{2}{3}) + k$

49) $\frac{x}{2}(\text{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)) + k$

50) $\frac{1}{2}\ln|x^2-4| + k$

51) $2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}(\frac{x+1}{\sqrt{2}}) + k$

52) $x\sqrt{a^2+b^2x^2} + \frac{a^2}{2b}\ln(\frac{bx}{a} + \frac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a}) + k$

53) $\frac{1}{b}\ln(\frac{bx}{a} + \frac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a}) + k$

54) $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2} + \frac{1}{2}\ln(x - 1 + \sqrt{x^2-2x+2})$ +k

55) $\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + 2\text{arcsen}(\frac{x+1}{2}) + k$

56) $\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}) + k$

57) $\text{sen}\, x - \frac{1}{3}\,\text{sen}^3 x + k$

58) $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+k$

59) $\frac{1}{2}\text{sen}^2 x-\frac{1}{2\,\text{sen}^2 x}-2\ln|\,\text{sen}\,x|+k$

60) $\frac{1}{4}\cos^8(\frac{x}{2})-\frac{1}{3}\cos^6(\frac{x}{2})+k$

61) $\frac{1}{2}\text{tg}^2 x+3\ln|\text{tg}x|-\frac{3}{2\text{tg}^2 x}-\frac{1}{4\text{tg}^4 x}+k$

62) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\text{sen}(2x)+\frac{1}{32}\text{sen}(4x)+k$

63) $\frac{1}{3}\text{sen}^3 x-\frac{2}{5}\text{sen}^5 x+\frac{1}{7}\text{sen}^7 x+k$

64) $\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\text{sen}(4x)+\frac{1}{48}\text{sen}^3(2x)+k$

65) $\frac{5}{16}x+\frac{1}{12}\,\text{sen}(6x)+\frac{1}{64}\,\text{sen}(12x)-\frac{1}{144}\text{sen}^3(6x)+k$

66) $-\frac{1}{3}\text{cotg}^3 x-\frac{1}{5}\text{cotg}^5 x+k$

67) $\text{tg}x+\frac{1}{3}\text{tg}^3 x-2\text{cotg}(2x)+k$

68) $\text{arcsen}\,x+\sqrt{1-x^2}+k$

69) $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+k$

70) $\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{16x}-\frac{1}{32}\ln(x^2+4)-\frac{3}{64}\,\text{arctg}\,\frac{x}{2}+\frac{4-x}{32(x^2+4)}+k$

71) $\frac{-\text{arctg}\,x}{x}+\ln|x|-\ln\sqrt{1+x^2}+k$

72) $\frac{3}{2}\,\text{arcsen}(x-1)-\left(\frac{x+3}{2}\right)\sqrt{2x-x^2}+k$

73) $2\ln|x+1|+\ln(x^2-2x+2)+3\,\text{arctg}(x-1)+k$

74) $x-\ln(1+e^x)+k$

75) $-\frac{\ln(x+1)}{x}+\ln|x|-\ln(x+1)+k$

76) $-\frac{1}{3}(x^3+1)e^{-x^3}+k$

77) $\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{4x}-\frac{1}{8}\ln(x^2+4)-\frac{1}{16}\,\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+k$

III - Aplicações da Integral Definida

1. 0.
3. $\frac{128}{105}a^3$.
4. 2.
5. $\ln(1+\sqrt{2})$.
6. $6a$.
7. $\frac{24}{5}\sqrt{3}$.
8. πab.
9. (a) $\frac{5\sqrt{5}-2}{3}\pi$.
   (b) $\frac{\pi}{6}$.
   (c) $\frac{\pi}{2}(e^2-e^{-2})^2$.
   (d) $\frac{5\pi}{6}$.
10. $\frac{32}{3}\pi$.
11. $\pi\left[\int_0^1 (e^x+2)^2dx - \int_0^1 \ln^2(x+1)dx\right]=...$
12. $(2\pi b)(\pi a^2)$.
13. $\pi h^2(a-\frac{h}{3})$.
14. $\text{senh}4+\text{senh}3$.

IV - Miscelânea

1. $\frac{2}{\pi}$.
5. $\frac{1}{2}(\frac{1}{\pi+2}+\frac{1}{2}-A)$.
10. $\frac{16}{3}R^3$.
11. $2F(2)-\frac{26}{9}$.
12. 0.
13. $\frac{\pi}{2}$.