Questão 1: (4,0) Seja $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-3}$. A

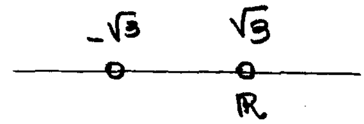
a) Determine o domínio de f e, caso existam, as assíntotas.

b) Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de f, bem como os pontos de máximo e de mínimo locais.

c) Mostre que o gráfico de f tem um único ponto de inflexão $\alpha > 3$. Estude a concavidade de f em função de α.

d) Use (a), (b) e (c) para esboçar o gráfico de f.

(a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm\sqrt{3}\}$



$$\lim_{x \to -\sqrt{3}^+} \frac{x-2}{x^2-3} = \lim_{x \to -\sqrt{3}^+} \underbrace{\frac{x-2}{x-\sqrt{3}}}_{\to \frac{-(\sqrt{3}+2)}{-2\sqrt{3}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x+\sqrt{3}}}_{x+\sqrt{3} \to 0,\ >0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\sqrt{3}^-} \frac{x-2}{x^2-3} = \lim_{x \to -\sqrt{3}^-} \underbrace{\frac{x-2}{x-\sqrt{3}}}_{>0} \cdot \underbrace{\frac{1}{x+\sqrt{3}}}_{\to 0,\ <0} = -\infty$$

Logo a reta $x = -\sqrt{3}$ é assíntota vertical.

Analogamente,

$$\lim_{x \to \sqrt{3}^+} \frac{x-2}{x^2-3} = \lim_{x \to \sqrt{3}^+} \underbrace{\frac{x-2}{x+\sqrt{3}}}_{\to \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}} < 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{x-\sqrt{3}}}_{\to 0,\ >0} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \sqrt{3}^-} \frac{x-2}{x^2-3} = \lim_{x \to \sqrt{3}^-} \underbrace{\frac{x-2}{x+\sqrt{3}}}_{<0} \underbrace{\frac{1}{x-\sqrt{3}}}_{\to 0,\ <0} = +\infty.$$

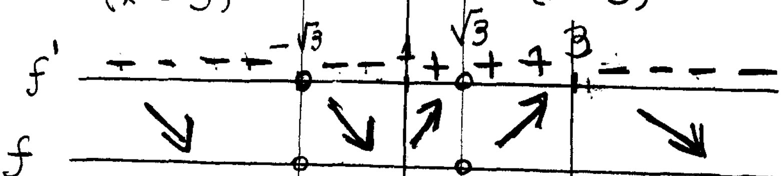
A reta $x = \sqrt{3}$ também é assíntota vertical.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-2}{x^2-3} = \lim_{x \to \pm\infty} \underbrace{\frac{x}{x^2}}_{\to 0} \underbrace{\frac{(1-2/x)}{(1-3/x^2)}}_{\to 1} = 0$$

Logo a reta $y = 0$ (eixo x) é assíntota horizontal.

Não existem assíntotas inclinadas.

(b) $$f'(x) = \frac{x^2-3-(x-2)2x}{(x^2-3)^2} = \frac{-x^2+4x-3}{(x^2-3)^2} \quad (\text{para } x \in D_f)$$



$x = 1$ pto de mínimo local

$x = 3$ pto de máximo local

(c) $$f''(x) = \frac{(-2x+4)(x^2-3)^2 - (-x^2+4x-3)2(x^2-3)2x}{(x^2-3)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(-2x+4)(x^2-3) + 4x(x^2-4x+3)}{(x^2-3)^3}$$

Logo $f''(x) = \dfrac{2x^3 - 12x^2 + 18x - 12}{(x^2-3)^3} = \dfrac{2(x^3 - 6x^2 + 9x - 6)}{(x^2-3)^3}$ A

O sinal de $f''(x)$ é determinado pelos sinais de $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 6$ e (x^2-3).

Vamos analisar o sinal de $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 6$.

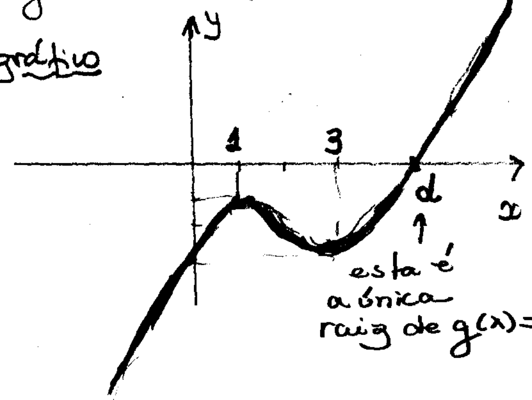
$g'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$.

		1		3	
g'	$+ + +$		$- - -$		$+ + +$
g	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

x	$g(x)$
1	-2
3	-6

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$

Esboço do gráfico de g



Como $x = 1$ é ponto de máximo local de $g(x)$, $g(1) < 0$ e g é estritamente decrescente em $]1,3[$, temos que $g(x) < 0 \ \forall x \in]-\infty, 3[$.

Agora, $g(3) < 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, temos, pelo TVI que existe $\alpha > 3$ tal que $g(\alpha) = 0$.

Como g é estritamente crescente em $]3,+\infty[$, temos que $g(x) > 0 \ \forall x > \alpha$.

Também é claro que $g(x) < 0 \ \forall x \in]3,\alpha[$.

Logo $g(x) < 0 \ \forall x < \alpha$.

(Usamos todo o tempo que g é CONTÍNUA)

Sinal de $f''(x)$:

		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		α	
x^2-3	$+ +$	0	$-$	0	$+ +$		$+ + +$
$g(x)$	$- -$		$-$		$- -$	0	$+ + +$
f''	$- -$		$+$		$- -$		$+$
	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

↳ α é o único ponto de inflexão de f e $\alpha > 3$.

(d)

x	$f(x)$
0	$2/3$
1	$1/2$
3	$1/6$
2	0