B

Questão 1: (4,0) Seja $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-5}$.

a) Determine o domínio de f e, caso existam, as assíntotas.

b) Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de f, bem como os pontos de máximo e de mínimo locais.

c) Mostre que o gráfico de f tem um único ponto de inflexão $\alpha > 5$. Estude a concavidade de f em função de α.

d) Use (a), (b) e (c) para esboçar o gráfico de f.

(a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{5}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm\sqrt{5}\}$

$-\sqrt{5}$

$$\lim_{x\to\sqrt{5}^+} \frac{x-3}{x^2-5} = \lim_{x\to\sqrt{5}^+} \frac{(x-3)}{\underbrace{(x+\sqrt{5})}_{\to 2\sqrt{5}}} \frac{1}{\underbrace{(x-\sqrt{5})}_{\to 0,\ >0}} = -\infty \qquad \sqrt{5}-3<0$$

Analogamente,

$$\lim_{x\to\sqrt{5}^-} \frac{x-3}{x^2-5} = \lim_{x\to\sqrt{5}^-} \frac{(x-3)}{(x+\sqrt{5})} \frac{1}{x-\sqrt{5}} = +\infty \qquad <0 \quad <0 \to 0$$

Logo a reta $x=\sqrt{5}$ é uma assíntota vertical.

$$\lim_{x\to-\sqrt{5}^+} \frac{x-3}{x^2-5} = \lim_{x\to-\sqrt{5}^+} \frac{x-3}{\underbrace{x-\sqrt{5}}_{\to -2\sqrt{5}}} \frac{1}{\underbrace{x+\sqrt{5}}_{\to 0,\ >0}} = +\infty \qquad -\sqrt{5}-3$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{5}^-} \frac{x-3}{x^2-5} = \lim_{x\to-\sqrt{5}^-} \frac{x-3}{x-\sqrt{5}} \frac{1}{\underbrace{x+\sqrt{5}}_{\to 0,\ <0}} = -\infty \qquad >0$$

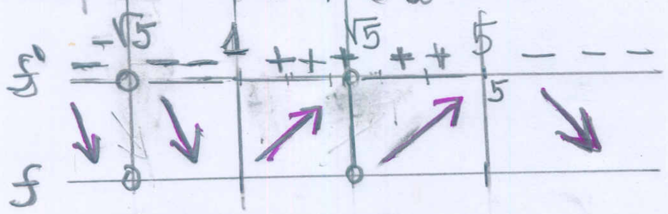
A reta $x=-\sqrt{5}$ também é uma assíntota vertical.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-3}{x^2-5} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(1-3/x)}{x^2(1-5/x^2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} \frac{(1-3/x)}{(1-5/x^2)} = 0$$

Logo a reta $y=0$ (eixo x) é uma assíntota horizontal. Não existe assíntota inclinada.

(b) $f'(x) = \dfrac{x^2-5-(x-3)2x}{(x^2-5)^2} = \dfrac{-x^2+6x-5}{(x^2-5)^2} \quad (x \neq \pm\sqrt{5})$

Como $(x^2-5)^2 > 0 \ \forall x$, o sinal de f' é determinado pelo sinal de $-x^2+6x-5$.



$x=1$ é ponto de mínimo local e $x=5$ é ponto de máximo local

(c) $f''(x) = \dfrac{(-2x+6)(x^2-5)^2 - (-x^2+6x-5)\,2(x^2-5)\,2x}{(x^2-5)^4}$

$$f''(x) = \frac{(-2x+6)(x^2-5)+4x(x^2-6x+5)}{(x^2-5)^3}$$

B

$$= \frac{2x^3-18x^2+30x-30}{(x^2-5)^3} = \frac{2(x^3-9x^2+15x-15)}{(x^2-5)^3}$$

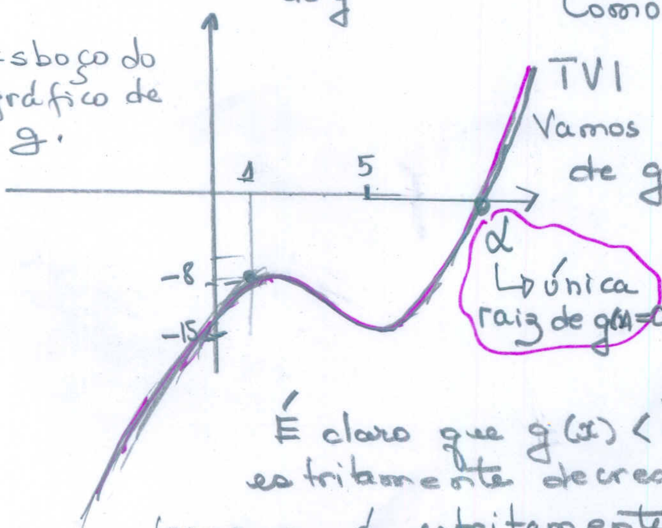
O sinal de $f''(x)$ é determinado pelo sinal de x^2-5 e de $g(x) = x^3-9x^2+15x-15$. Vamos estudar o sinal de $g(x)$. Temos que $g'(x) = 3x^2-18x+15 = 3(x^2-6x+5)$.

		1		5	
g'	$+++$		$---$		$+++$
g	↗		↘		↗

↳ pto de máx local de g

$g(1) = -8$ e $g(5) < -8$, já que g é estritamente decrescente em $]1,5[$. Em particular, $g(5) < 0$. Como $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, temos, pelo TVI que g tem uma raiz $\alpha > 5$. Vamos ver que essa é a única raiz de g. Temos que $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, g estritamente crescente em $]-\infty, 1[$, e $g(1) < 0$. Logo $g(x) < 0 \ \forall x \in]-\infty, 1[$.

Esboço do gráfico de g.



É claro que $g(x) < 0$ se $x \in]1,5[$ já que g é estritamente decrescente nesse intervalo e $g(1) < 0$.

Como g é estritamente crescente em $]5,+\infty[$ e $g(5) < 0$, $g(\alpha) = 0$, temos que $g(x) < 0$ em $]5,\alpha[$.

Como $g(\alpha) = 0$ e g é estritamente crescente se $x > \alpha$, temos que $g(x) > 0 \ \forall x > \alpha$.

(É claro que usamos que g é CONTÍNUA.)

Sinal de $f''(x)$:

		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$		5		α	
x^2-5	$+++$	0	$--$	0	$+$	$+$	$+$		$++$
$g(x)$	$---$		$--$		$---$			0	$++$
$f''(x)$	$---$		$+++$		$---$			0	$++$
f	∩		∪		∩				∪

↳ único ponto de inflexão de f

x	$f(x)$
0	3/5
1	1/2
5	1/10
3	0

(d)