Questão 3-a): (1,5) Prove que $\mathrm{tg}(x) \geq x + \dfrac{x^3}{3}$, para todo $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

Resolução:

Considere a função $g(x) = \mathrm{tg}(x) - x - \dfrac{x^3}{3}$, com $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

Como $g(0) = 0$, basta mostrar que g é estritamente crescente, ou seja, que $g'(x) > 0$, $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

De fato, $g'(x) = \sec^2(x) - 1 - x^2 = \mathrm{tg}^2(x) - x^2 = (\mathrm{tg}(x) - x)(\mathrm{tg}(x) + x)$.

Como $\mathrm{tg}(x) > 0$ e $x > 0$, para $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, basta mostrar que $h(x) = \mathrm{tg}(x) - x > 0$, para $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Mas $h(0) = 0$ e $h'(x) = \sec^2(x) - 1 = \mathrm{tg}^2(x) > 0$, para $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. cqd

Questão 3-b): (1,5) Calcule, se existir, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)}\right]$.

Resolução:

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1) - x}{x \ln(x+1)} =$$

Como a indeterminada é do tipo $\frac{0}{0}$, aplicando as regras de L'Hospital, temos:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - 1}{\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1-x-1}{x+1}}{\frac{(x+1)\ln(x+1)+x}{x+1}} = \lim_{x \to 0} \frac{1-x-1}{(x+1)\ln(x+1)+x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x}{(x+1)\ln(x+1)+x}$$

Como a indeterminada é do tipo $\frac{0}{0}$, aplicando as regras de L'Hospital, temos:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-1}{1 + \ln(x+1) + 1} = -\frac{1}{2}.$$