Questão 3-a): (1,5) Prove que $\operatorname{tg}(x) \geq x + \dfrac{x^3}{3}$, para todo $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

Resolução:

Considere a função $g(x) = \operatorname{tg}(x) - x - \dfrac{x^3}{3}$, com $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

Como $g(0) = 0$, basta mostrar que g é estritamente crescente, ou seja, que $g'(x) > 0$, $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

De fato, $g'(x) = \sec^2(x) - 1 - x^2 = \operatorname{tg}^2(x) - x^2 = (\operatorname{tg}(x) - x)(\operatorname{tg}(x) + x)$.

Como $\operatorname{tg}(x) > 0$ e $x > 0$, para $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, basta mostrar que $h(x) = \operatorname{tg}(x) - x > 0$, para $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Mas $h(0) = 0$ e $h'(x) = \sec^2(x) - 1 = \operatorname{tg}^2(x) > 0$, para $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. cqd

Questão 3-b): (1,5) Calcule, se existir, $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{1}{\ln(x+1)} - \dfrac{1}{x}\right]$.

Resolução:

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x\ln(x+1)} =$$

Como a indeterminada é do tipo $\frac{0}{0}$, aplicando as regras de L'Hospital, temos:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x+1-1}{x+1}}{\frac{(x+1)\ln(x+1)+x}{x+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{(x+1)\ln(x+1)+x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{(x+1)\ln(x+1)+x}$$

Como a indeterminada é do tipo $\frac{0}{0}$, aplicando as regras de L'Hospital, temos:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + \ln(x+1) + 1} = \frac{1}{2}.$$