MAT 2453 - P3

Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I

23.06.2009

Resolução da Questão 1

Sejam B o comprimento da base maior do trapézio, b o da base menor, x o dos lados, $A = 10$ a área e θ o ângulo da base ($\theta = \pi/4$ para provas tipo "A" e $\theta = \pi/3$ para provas tipo "B"). Tem-se $A = bx\sin\theta + x^2\sin\theta\cos\theta$, donde $b = \frac{A}{x\sin\theta} - x\cos\theta$. O perímetro P do trapézio é dado por $P = B + b + 2x = 2b + 2x\cos\theta + 2x = \frac{2A}{x\sin\theta} + 2x$. Assim, tomando-se $P : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto \frac{2A}{x\sin\theta} + 2x$, o problema se reduz a encontrar, caso exista, o(s) ponto(s) de mínimo de P. Ora, P é duas vezes derivável, sendo $P' : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ e $P'' : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dadas, respectivamente, por $x \mapsto -\frac{2A}{\sin\theta}\frac{1}{x^2} + 2$ e $x \mapsto \frac{4A}{\sin\theta}\frac{1}{x^3}$. Como P'' é estritamente positiva, segue-se como corolário do Teorema do Valor Médio (TVM) que P' é estritamente crescente. Assim, como P' se anula apenas em $x_0 = \sqrt{\frac{A}{\sin\theta}}$, conclui-se que $P' < 0$ em $(0, x_0)$ e $P' > 0$ em $(x_0, +\infty)$, donde, novamente como corolário do TVM, P é estritamente decrescente em $(0, x_0]$ e estritamente crescente em $[x_0, +\infty)$. Conclui-se, então, que $x_0 = \sqrt{\frac{A}{\sin\theta}}$ (i.e. $x_0 = \sqrt{10\sqrt{2}}$ para provas tipo "A" e $x_0 = \sqrt{\frac{20}{\sqrt{3}}}$ para provas tipo "B") é o único ponto de mínimo de P - que corresponde, portanto, ao lado do trapézio que tem perímetro mínimo.