MAT 2453 - Cálculo I - POLI - 2009

Resolução de Algumas Questões da 3ª Lista de Exercícios

1-) O objetivo desta questão é demonstrar como a *lei da reflexão plana* e a *lei da refração de Snellius*, da Óptica Geométrica, podem ser obtidas como conseqüências do *princípio de Fermat*, segundo o qual "a trajetória dos raios de luz é aquela que minimiza o tempo de percurso".

(a) (Reflexão Plana) Sejam $P = (0, a)$ e $Q = (b, c)$, onde a, b, c são números reais positivos. Seja $M = (x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$ (vide figura 1). Seja $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $d(x)$ é a soma das distâncias $d(P, M) + d(M, Q)$. Mostre que a função d possui um único ponto de mínimo $x_0 \in \mathbb{R}$. Verifique que $x_0 \in (0, b)$ e que $\alpha = \beta$ se $x = x_0$.

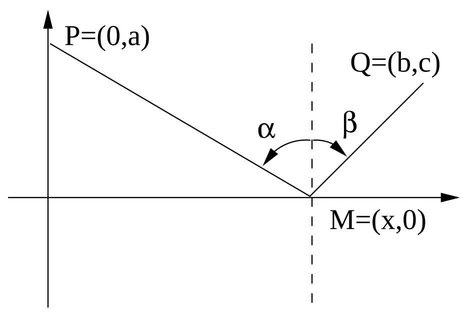


Figura 1: Reflexão Plana

Observação: Note que, admitindo que a luz se propague com velocidade constante no semi-plano superior, minimizar a soma das distâncias $d(P, M) + d(M, Q)$ é equivalente a minimizar o tempo que um raio de luz leva para ir de P a Q, refletindo-se no eixo Ox.

(b) (Lei de Refração de Snellius) Sejam $P \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano superior e $Q \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano inferior, fixos (vide figura 2). Uma partícula vai de P a um ponto $M = (x, 0)$ sobre o eixo Ox com velocidade constante u e movimento retilíneo; em seguida, vai de M até Q com velocidade constante v, também em movimento retilíneo. Seja $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $T(x)$ é o tempo de percurso de P a Q. Mostre que T possui um único ponto de mínimo $x_0 \in \mathbb{R}$. Verifique que $x_0 \in (0, b)$ e que, se $x = x_0$, então:

$$\frac{\sin \alpha}{u} = \frac{\sin \beta}{v}.$$

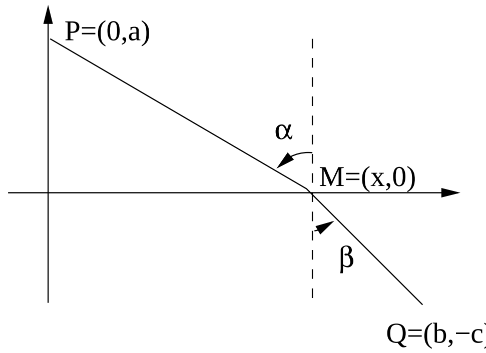


Figura 2: Refração

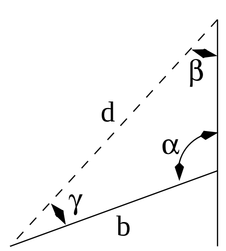
Resp.: Solução do item "b"

O tempo que a partícula gasta para ir de P a Q, passando por $M = (x, 0)$, é dado por $\frac{d(P,M)}{u} + \frac{d(M,Q)}{v}$. Assim, $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right) T(x) = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{u} + \frac{\sqrt{(x-b)^2+c^2}}{v}$. Portanto, pela regra da cadeia, T é duas vezes derivável e suas derivadas primeira e segunda são dadas por, respectivamente, $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right) T'(x) = \frac{1}{u} \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{1}{v} \frac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2+c^2}}$, $T''(x) = \frac{1}{u} \frac{\sqrt{x^2+a^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x^2+a^2} + \frac{1}{v} \frac{\sqrt{(x-b)^2+c^2} - \frac{(x-b)^2}{\sqrt{(x-b)^2+c^2}}}{(x-b)^2+c^2} = \frac{1}{u} \frac{a^2}{(x^2+a^2)^{3/2}} + \frac{1}{v} \frac{c^2}{((x-b)^2+c^2)^{3/2}}$. Assim, $T''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $T'(0) < 0$, $T'(b) > 0$ e T' é contínua, pelo teorema do valor intermediário existe $x_0 \in (0, b)$ tal que $T'(x_0) = 0$; como $T'' > 0$, T' é crescente e, em particular, injetiva, portanto x_0 é a única raiz de T'. Pelo teste da derivada segunda, conclui-se que x_0 é ponto de mínimo de T, e é o único ponto de mínimo, pois, pelo teorema de Fermat, se houvesse algum outro, também seria ponto crítico, e já vimos que x_0 é a única raiz de T'. Então está demonstrado que T possui um único ponto de mínimo x_0, e x_0 pertence ao intervalo $(0, b)$. Além disso, como $\sin\alpha(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ e $\sin\beta(x) = -\frac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2+c^2}}$, $T'(x_0) = 0$ é equivalente a $\frac{\sin\alpha(x_0)}{u} - \frac{\sin\beta(x_0)}{v} = 0$.

2-) Deve-se construir uma estrada ligando uma fábrica A a uma ferrovia que passa por uma cidade B. Assumindo-se que a estrada e a ferrovia sejam ambas retilíneas, e que os custos de frete por unidade de distância sejam m vezes maiores na estrada do que na ferrovia, encontre o ângulo α a que a estrada deve ser conectada à ferrovia de modo a minimizar o custo total do frete da fábrica até a cidade. Assuma $m > 1$.

Resp.:

Sejam: d a distância da fábrica à cidade, b a distância a ser percorrida na rodovia, a a distância a ser percorrida na ferrovia, e ângulos como na figura abaixo.



Denotando por C o custo total do frete e por f o custo do frete por unidade de distância na ferrovia, tem-se: $C = fa + mfb$. Pelo teorema dos senos, tem-se:

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{d} = \frac{\sin\gamma}{a},$$

donde $b = \frac{d\sin\beta}{\sin\alpha}$, $a = \frac{d\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{d\sin\left(\pi-(\alpha+\beta)\right)}{\sin\alpha} = \frac{d(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)}{\sin\alpha}$. Portanto, $\frac{C}{f} = \frac{d(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)}{\sin\alpha} + m\frac{d\sin\beta}{\sin\alpha} = d\cos\beta + d\sin\beta\frac{m+\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Assim sendo, o problema se reduz a encontrar (caso exista) o(s) ponto(s) de mínimo da função:

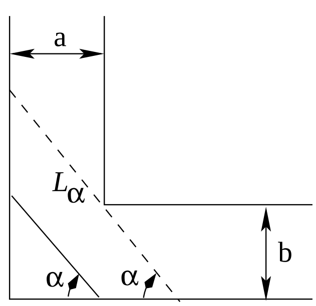
$$\begin{array}{rccc} F: & [\frac{\pi}{2}, \pi-\beta] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longmapsto & d\cos\beta + d\sin\beta\frac{m+\cos\alpha}{\sin\alpha} \end{array}.$$

A referida função é derivável, e sua derivada é dada por $\left(\forall\, \alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi)\right)$ $F'(\alpha) = d\sin\beta\frac{-\sin^2\alpha-\cos\alpha(m+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{d\sin\beta(-1-m\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$. Tomando $g : [\frac{\pi}{2}, \pi) \to \mathbb{R}$ dada por $\left(\forall\, \alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi)\right)$ $g(\alpha) = -1 - m\cos\alpha$, g é derivável e $\left(\forall\, \alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi)\right)$ $g'(\alpha) = m\sin\alpha > 0$, logo g é estritamente crescente; como g se anula em $\arccos(-\frac{1}{m})$ (note que $m > 1$ por hipótese, portanto $-\frac{1}{m} \in \operatorname{dom}\arccos$), segue $g < 0$ em $[\frac{\pi}{2}, \arccos(-\frac{1}{m}))$ e $g > 0$ em $(\arccos(-\frac{1}{m}), \pi)$. Assim: (i) se $\arccos(-\frac{1}{m}) < \pi - \beta$, tem-se $F' < 0$ em $[\frac{\pi}{2}, \arccos(-\frac{1}{m}))$ e $F' > 0$ em $(\arccos(-\frac{1}{m}), \pi-\beta]$ e, por um corolário do teorema do valor médio, conclui-se que $\arccos(-\frac{1}{m}) = \pi - \arccos(\frac{1}{m})$ é ponto de mínimo de F; (ii) se $\arccos(-\frac{1}{m}) \geqslant \pi - \beta$, tem-se $F' < 0$ em $[\frac{\pi}{2}, \pi-\beta]$ e, novamente por um corolário do teorema do valor médio, conclui-se que $\pi - \beta$ é ponto de mínimo de F. Assim, o ponto de mínimo de F é $\min\{\pi - \arccos(\frac{1}{m}), \pi - \beta\}$.

3-) Dois corredores com largura $a > 0$ e $b > 0$ intersectam-se em ângulo reto. Determine o comprimento máximo l de uma escada que pode ser transportada horizontalmente de um corredor para o outro.

Resp.:

Sem perda de generalidade, pode-se assumir que a escada de comprimento máximo será transportada de um corredor para o outro de tal forma que suas extremidades se apóiem sobre as paredes externas, conforme a figura abaixo.

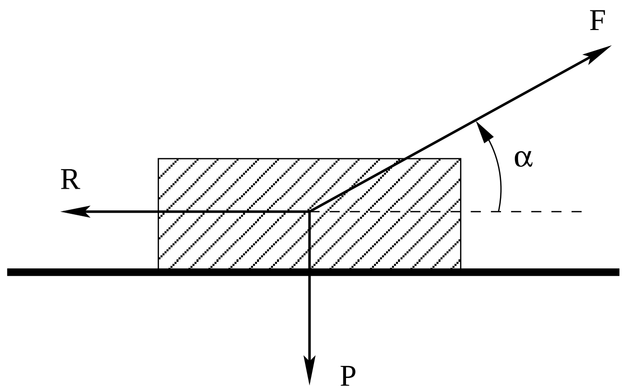


Ao ser feito o transporte, o ângulo α que a escada forma com a parede do corredor de largura b variará de 0 a $\frac{\pi}{2}$. Para cada $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ fixo, o comprimento máximo L_α da escada que pode ser colocada nos corredores, formando um ângulo α com o corredor de largura b, será, conforme a figura, $\frac{b}{\sin\alpha} + \frac{a}{\cos\alpha}$. Assim, o transporte será possível se, e somente se, o comprimento da escada for menor ou igual a L_α, para todo $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. O máximo comprimento da escada que pode ser transportada será, portanto, o valor mínimo (caso exista) da função:

$$\begin{array}{rccc} f: & (0, \frac{\pi}{2}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longmapsto & \frac{b}{\sin\alpha} + \frac{a}{\cos\alpha} \end{array}.$$

Tal função é derivável e sua derivada é dada por $\left(\forall\, \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}\,)\right) f'(\alpha) = -\frac{b\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{a\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{-b\cos^3\alpha + a\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$. Seja $g : (0, \frac{\pi}{2}\,) \to \mathbb{R}$ dada por $\left(\forall\, \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}\,)\right) g(\alpha) = -b\cos^3\alpha + a\sin^3\alpha$. Esta função é derivável e sua derivada é dada por $\left(\forall\, \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}\,)\right) g'(\alpha) = 3b\cos^2\alpha\sin\alpha + 3a\sin^2\alpha\cos\alpha$, portanto $g' > 0$ em $(0, \frac{\pi}{2}\,)$, donde g é estritamente crescente. Como g se anula em $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}\,)$ tal que $\tan\alpha = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, i.e. $\alpha = \arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, segue que $g < 0$ em $(0, \arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,)$ e $g > 0$ em $(\arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}}, \frac{\pi}{2}\,)$. Logo, $f' < 0$ em $(0, \arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,)$ e $f' > 0$ em $(\arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}}, \frac{\pi}{2}\,)$. Então, pelo teste da derivada primeira, $\arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ é ponto de mínimo de f, logo o valor mínimo de f é $f(\arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,) = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$.

4-) Um corpo de peso P apoiado sobre um plano horizontal deve ser deslocado horizontalmente pela aplicação de uma força F. Qual o ângulo α com a horizontal deve formar a força para que a intensidade da mesma necessária para mover o corpo seja mínima, admitindo coeficiente de atrito $\mu > 0$?



Resp.: Para cada $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}\,]$ fixo, o valor mínimo da força F para movimentar o bloco é tal que a diferença entre a componente horizontal de F e a força de atrito R seja positiva, i.e. $F\cos\alpha - \mu(P - F\sin\alpha) \geqslant 0$, ou seja, $F \geqslant \frac{\mu P}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$. Assim sendo, o problema se reduz a encontrar o(s) ponto(s) de mínimo da função contínua:

$$\begin{array}{rccc} f: & [0, \frac{\pi}{2}\,] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longmapsto & \frac{\mu P}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} \end{array}.$$

A referida função é derivável, e sua derivada é dada por $\left(\forall\, \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}\,]\right) f'(\alpha) = -\frac{\mu P(-\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)^2}$. Tomando $g : [0, \frac{\pi}{2}\,] \to \mathbb{R}$ dada por $\left(\forall\, \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}\,]\right) g(\alpha) = \sin\alpha - \mu\cos\alpha$, g é derivável e $\left(\forall\, \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}\,]\right) g'(\alpha) = \cos\alpha + \mu\sin\alpha > 0$, logo g é estritamente crescente. Como g se anula em $\arctan\mu$, segue $g < 0$ em $[0, \arctan\mu)$ e $g > 0$ em $(\arctan\mu, \frac{\pi}{2}\,]$, portanto $f' < 0$ em $[0, \arctan\mu)$ e $f' > 0$ em $(\arctan\mu, \frac{\pi}{2}\,]$. Assim, pelo teste da derivada primeira, conclui-se que $\arctan\mu$ é ponto de mínimo de f.

5-) Deseja-se construir uma esfera e um cubo de modo que a soma das áreas de suas superfícies seja igual a 2.

(i) Encontre o raio da esfera e o lado do cubo que minimizam a soma de seus volumes.

(ii) Encontre o raio da esfera e o lado do cubo que maximizam a soma de seus volumes.

Resp.:

Sejam $r \geqslant 0$ o raio da esfera e $l \geqslant 0$ o lado do cubo. A soma das áreas de suas superfícies é dada por:

$$A = 6l^2 + 4\pi r^2 = 2$$

Soma dos volumes:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 + l^3$$

Fazendo $6l^2 = 2 - 4\pi r^2$, temos $l = \sqrt{\frac{2-4\pi r^2}{6}}$. Assim, o problema se reduz a encontrar (caso existam) os pontos de máximo e mínimo da função $V : [0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 + \Big(\frac{1-2\pi r^2}{3}\Big)^{3/2}$$

Como V é contínua e está definida no intervalo fechado e limitado $[0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}]$, pelo teorema de Weierstrass conclui-se que existem pontos de máximo e de mínimo de V no referido intervalo. Além disso, como V é derivável, segue do teorema de Fermat que, se um destes pontos não for extremidade do intervalo, deverá ser um ponto crítico de V no interior do mesmo. Conclusão: V tem pontos de máximo e mínimo no intervalo $[0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}]$, e tais pontos pertencem ao conjunto formado pelas extremidades do intervalo e pelos pontos críticos de V no interior do mesmo.

A função derivada de V, $V' : [0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}] \to \mathbb{R}$, é dada por:

$$\begin{aligned} V'(r) &= 4\pi r^2 - 2\pi r\sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}} = \\ &= 2\pi r\Big(2r - \sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}}\Big) \end{aligned}$$

Para encontrar os pontos críticos de V, observe que $2\pi r\Big(2r - \sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}}\Big) = 0$ se, e somente se, $r = 0$ ou $2r = \sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}}$, i.e. se, e somente se $r = 0$ ou $r = \frac{1}{\sqrt{2\pi+12}}$. Assim, os pontos críticos de V são 0 e $r_0 \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi+12}} \in (0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$.

Além disso, como 0 e r_0 são os únicos zeros de V', e como V' é contínua, segue do teorema do valor intermediário que V' deve ter sinal constante nos intervalos $(0, r_0)$ e $(r_0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}]$. Mas $V'(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}) = 2 > 0$, e $\lim\limits_{r\to 0} \Big(2r - \sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}}\Big) = -\frac{1}{\sqrt{3}} < 0$ (portanto $2\pi r\Big(2r - \sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}}\Big)$ tem sinal negativo para $r > 0$ e próximo de zero), o que nos permite concluir que V' tem sinal negativo em $(0, r_0)$ e positivo em $(r_0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$. Logo, pelo teste da derivada primeira, $r_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi+12}}$ é o ponto de mínimo de V.

Por outro lado, temos: $V(0) = \sqrt{\frac{1}{27}}$ e $V(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}) = \sqrt{\frac{1}{9\frac{\pi}{2}}}$. Como $\pi < 4$, tem-se $\frac{\pi}{2} < 2$, logo $9\frac{\pi}{2} < 27$, donde $\frac{1}{9\frac{\pi}{2}} > \frac{1}{27}$, o que implica $V(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}) > V(0)$. Assim, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ é o ponto de máximo de V.

6-) Dados $a, b > 0$, calcule a área da região do plano cartesiano limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Resp.:

Pelo teorema de mudança de variáveis na integral de Riemann, tomando $g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = a\sin t$, tem-se:

$$
\begin{aligned}
2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} b\sqrt{1-\frac{g(t)^2}{a^2}}\,g'(t)\,dt = \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ab\cos^2 t\,dt = \\
&= 2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2t)\big)\,dt \\
&= 2ab\frac{t}{2}\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} + ab\frac{\sin(2t)}{4}\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \\
&= \pi ab.
\end{aligned}
$$

7-) *Teorema da Energia Cinética.* Sobre uma partícula que se desloca sobre o eixo Ox atua uma força $F(x) = f(x)\overrightarrow{i}$, onde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. O trabalho τ realizado por F quando a partícula se desloca de $x = x_0$ até $x = x_1$ é definido por:

$$\tau = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$$

admitindo-se que f seja integrável em $[x_0, x_1]$. Suponha que f seja contínua, que a partícula tenha massa $m > 0$ e que o seu movimento seja uma função derivável até segunda ordem $x = x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, governado pela lei de Newton:

$$mx''(t)\overrightarrow{i} = F\big(x(t)\big).$$

Mostre que o trabalho τ realizado pela força F atuante sobre a partícula quando a mesma se desloca de $x_0 = x(t_0)$ até $x_1 = x(t_1)$ é igual à variação de energia cinética $\frac{1}{2}\,m\,x'(t_1)^2 - \frac{1}{2}\,m\,x'(t_0)^2$.

Resp.: Pelo teorema de mudança de variáveis na integral de Riemann, tem-se:

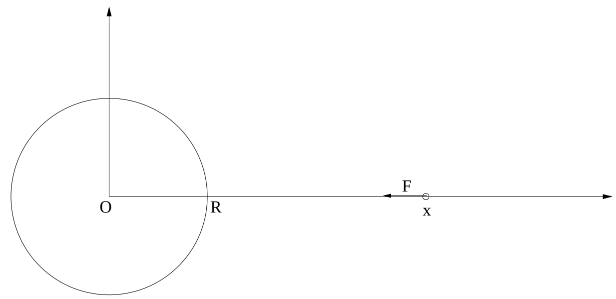
$$
\begin{aligned}
\tau = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx &= \int_{t_0}^{t_1} f\big(x(t)\big)x'(t)\,dt = \\
&= \int_{t_0}^{t_1} mx''(t)\,x'(t)\,dt = m\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\Big[\frac{x'(t)^2}{2}\Big]\,dt = \\
&= \frac{1}{2}\,m\,x'(t_1)^2 - \frac{1}{2}\,m\,x'(t_0)^2,
\end{aligned}
$$

sendo a última igualdade conseqüência do teorema fundamental do cálculo.

8-) *Velocidade de Escape.* De acordo com a *lei da gravitação de Newton*, a força com que a Terra atrai uma partícula de massa $m > 0$ é dada por $F(x) = f(x)\overrightarrow{i}$, onde $f:[R,\infty)\to\mathbb{R}$ é dada por:

$$f(x) = -\frac{G\,M\,m}{x^2},$$

sendo $G > 0$ a constante gravitacional universal, $M > 0$ a massa da Terra, $R > 0$ o raio da Terra e $x \in [R,\infty)$ a distância da partícula ao centro da Terra. Admita que a partícula seja lançada com velocidade $v > 0$ da superfície da Terra, e que o seu movimento $x = x(t)$, $t \geq 0$, seja governado pela segunda lei de Newton, i.e. $(\forall t \geq 0)\ mx''(t) = f\big(x(t)\big)$.



(a) Suponha que a partícula atinja uma altura máxima $h_{max} > R$ e depois retorne à Terra. Calcule h_{max} em função de v.

Sugestão: Calcule o trabalho realizado por F quando a partícula se desloca de $x = R$ até $x = h_{max}$, e aplique o teorema da energia cinética, levando em conta que para $x = h_{max}$ a velocidade $x'(t)$ da partícula se anula.

(b) Encontre o maior intervalo $[0, v_e[\subset \mathbb{R}$ no qual é possível definir a função $v \mapsto h_{max}(v)$, sendo h_{max} como no item anterior (i.e. encontre o maior $v_e \in \mathbb{R}$ para o qual faz sentido definir a função no referido intervalo). Verifique que $\lim_{v \to v_e} h_{max}(v) = +\infty$. (Resp.: $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$)

Observação: v_e chama-se **velocidade de escape** do campo gravitacional terrestre; é a menor velocidade inicial para a qual a partícula não retorna à Terra.

Resp.:

(a) Pelo teorema da energia cinética (vide questão anterior), tem-se:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\, m v^2 &= \int_R^{h_{max}(v)} f(x)\, dx = \\ &= -\int_R^{h_{max}(v)} \frac{G\, M\, m}{x^2}\, dx = \\ &= \frac{G\, M\, m}{x}\Big]_R^{h_{max}(v)} = \frac{G\, M\, m}{h_{max}(v)} - \frac{G\, M\, m}{R}\,. \end{aligned}$$

Portanto:

$$h_{max}(v) = \frac{2\, G\, M\, R}{2\, G\, M - R\, v^2}\,. \tag{1}$$

(b) O maior intervalo $[0, v_e[\subset \mathbb{R}$ no qual é possível definir a função $v \mapsto h_{max}(v)$, sendo h_{max} dada por (1), é aquele para o qual $v_e = \sqrt{\frac{2G\,M}{R}}$. Decorre imediatamente de (1) que $\lim_{v \to v_e} h_{max}(v) = +\infty$.

9-) Suponha que uma partícula se desloca ao longo do eixo $0x$, segundo uma função horária $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ e sob ação de uma força $f(x)\, \overrightarrow{i}$, dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Admita que a dinâmica da partícula é governada por um modelo relativístico: sua massa m depende da sua velocidade v, segundo a função $m : (-c, c) \to \mathbb{R}$ definida por (dados $c > 0$ velocidade da luz e $m_0 > 0$ massa de repouso):

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\,,$$

e sua função horária x satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{d}{dt}\big(m(x'(t))x'(t)\big) = f\big(x(t)\big).$$

Mostre que, se interpretarmos o trabalho $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$ realizado pela força f quando a partícula se desloca de $x_0 = x(t_0)$ a $x_1 = x(t_1)$ como variação de energia ΔE, e se $\Delta m = m\big(x'(t_1)\big) - m\big(x'(t_0)\big)$, então:

$$\Delta E = \Delta m\, c^2.$$

Sugestão: Use o teorema de mudança de variáveis na integral de Riemann e o teorema fundamental do cálculo.

Resp.: Como $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(x'/c)^2}} = m_0[1-(x'/c)^2]^{-1/2}$, tem-se:

$$\begin{aligned} m' &= -\frac{1}{2}\,m_0[1-(x'/c)^2]^{-3/2}\frac{(-2x'x'')}{c^2} = \\ &= \frac{m_0x'x''c}{[c^2-(x')^2]^{3/2}}\,, \end{aligned}$$

portanto:

$$\begin{aligned} (mx')' &= m'x' + mx'' = \\ &= \frac{m_0cx''}{[c^2-(x')^2]^{1/2}} + \frac{m_0(x')^2x''c}{[c^2-(x')^2]^{3/2}} = \\ &= \frac{m_0cx''[c^2-(x')^2] + m_0(x')^2x''c}{[c^2-(x')^2]^{3/2}} = \\ &= \frac{m_0cx''c^2}{[c^2-(x')^2]^{3/2}}\,. \end{aligned}$$

Assim, aplicando-se o teorema de mudança de variáveis na integral de Riemann, conclui-se que o trabalho da força será dado por:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx &= \int_{t_0}^{t_1} f\big(x(t)\big)\,x'(t)\,dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (mx')'\,x' = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{m_0cx'x''c^2}{[c^2-(x')^2]^{3/2}} = \\ &= c^2\int_{t_0}^{t_1} m' = c^2\,[m(t_1) - m(t_0)]. \end{aligned}$$