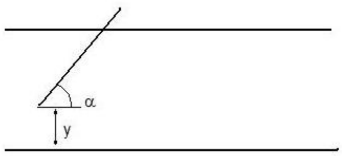
MAT 2453 - Cálculo I - POLI - 2009

Uma solução para o Problema de Buffon

1-) *Problema de Buffon.* Num plano são traçadas linhas paralelas equidistantes. Joga-se neste plano uma agulha cujo comprimento é igual à distância entre as linhas. Calcule a probabilidade de que a agulha intercepte uma das linhas.

Resp.:

Seja d a distância entre as linhas; por hipótese, d é igual ao comprimento da agulha. Descrevamos a posição final da agulha, após o lançamento, pela distância y da sua extremidade inferior até a linha que fica imediatamente abaixo e pelo ângulo α que a agulha forma com a horizontal, conforme a figura abaixo.



Tem-se: $0 \leqslant y < d$ e $0 \leqslant \alpha < \pi$. O espaço amostral será, portanto, $\Omega = [0, d) \times [0, \pi) \subset \mathbb{R}^2$. Designemos por $S \subset \Omega$ o conjunto dos eventos que correspondem a "sucesso", i.e. o conjunto das posições finais em que a agulha intercepta alguma linha. Admitindo que não haja razão para que alguma posição final ocorra com mais frequência que outra, o espaço deve ser equiprovável; assim, denotando por $A(X)$ a área de um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ (que tenha área no sentido da integral de Riemann), a probabilidade de sucesso será dada por $P = \frac{A(S)}{A(\Omega)} = \frac{A(S)}{\pi d}$.

Dado $(y, \alpha) \in \Omega$, tem-se $(y, \alpha) \in S$ se, e somente se, (i) $y > 0$ e $\arcsin \frac{d-y}{d} \leqslant \alpha \leqslant \pi - \arcsin \frac{d-y}{d}$ ou (ii) $y = 0$ e α qualquer. Desconsideraremos os eventos do tipo (ii), que correspondem a um subconjunto de Ω de área zero, i.e. de probabilidade zero. Assim, $A(S) = \int_0^d (\pi - 2 \arcsin \frac{d-y}{d}) \, dy$. Integrando-se por partes, tomamos $\int \arcsin \frac{d-y}{d} \, dy = -(d-y) \arcsin \frac{d-y}{d} - \sqrt{d^2 - (d-y)^2}$, donde $\int (\pi - 2 \arcsin \frac{d-y}{d}) \, dy = \pi y + 2[(d-y) \arcsin \frac{d-y}{d} + \sqrt{d^2 - (d-y)^2}]$. Portanto, aplicando-se o Teorema Fundamental do Cálculo, conclui-se que $A(S) = \pi d + 2(d - d \arcsin 1) = 2d$. Obtém-se, então, $P = \frac{2d}{\pi d} = \frac{2}{\pi}$.