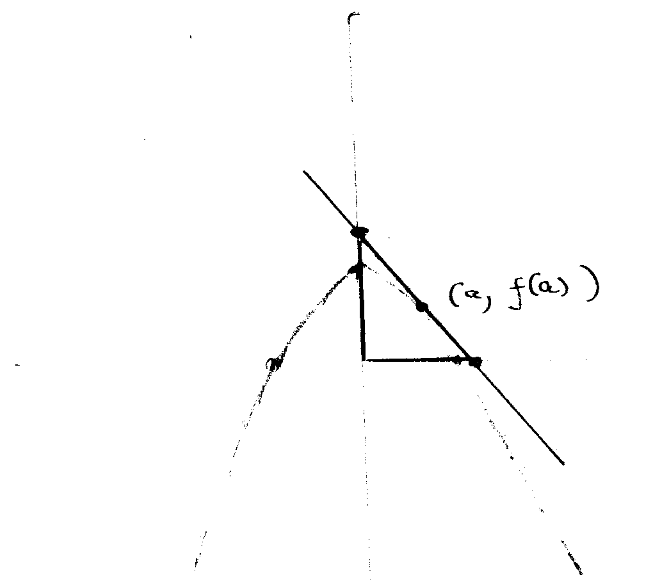
2-) (2,0 pontos) Qual é a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = 1 - x^2$ que forma com os eixos coordenados, no primeiro quadrante, um triângulo de área mínima?



Equação da reta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$:

$$f'(x) = -2x \Rightarrow f'(a) = -2a$$

$$\boxed{y - (1 - a^2) = -2a(x - a)}$$

Queremos o triângulo no primeiro quadrante. Assim

$0 < a < 1$

A reta tangente em $(a, f(a))$ intersecta o eixo x em $\left(\frac{a^2+1}{2a}, 0\right)$ e intersecta o eixo y em $(0, 1+a^2)$. Logo a área do triângulo

é $A(a) = \frac{1}{2}\frac{(a^2+1)^2}{2a} = \frac{1}{4}\frac{(a^2+1)^2}{a}$

Queremos então o mínimo de $A(a)$ com $a \in]0,1[$.

$$A'(a) = \frac{1}{4}\left[\frac{2(a^2+1)\cdot 2a\,a - (a^2+1)^2}{a^2}\right] = \frac{1}{4a^2}(a^2+1)\left[4a^2 - a^2 - 1\right]$$

$= \frac{a^2+1}{4a^2}(3a^2 - 1)$. A única raiz de $A'(a)$ em $]0,1[$

é $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e o sinal de $A'(a)$ nesse intervalo

é A': 0 $- - -$ $1/\sqrt{3}$ $+ + +$ 1. Logo, $a = 1/\sqrt{3}$ é pto

de mínimo e a equação da reta tangente nesse ponto

é $\boxed{y - \frac{2}{3} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$