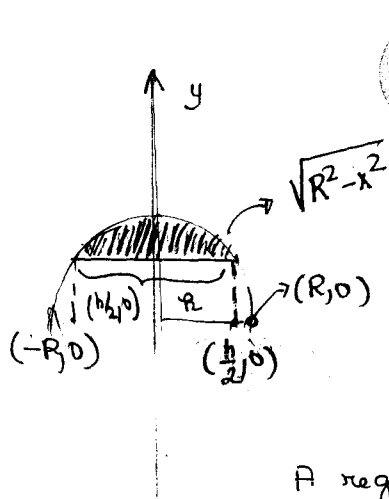


- 4-) (2,0 pontos) Um anel esférico é o sólido que permanece após a perfuração de um buraco cilíndrico através do centro de uma esfera sólida. Se a esfera tem raio R e o anel esférico tem altura h , calcule o volume do anel.



Para obter o anel esférico de altura h , basta girar x a região sombreada em torno do eixo x .

A região sombreada é:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{h}{2} \leq x \leq \frac{h}{2} \text{ e } \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2} \right\}$$

Portanto, pela simetria, o volume do anel esférico é:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{-h/2}^{h/2} \left[(\sqrt{R^2 - x^2})^2 - (\sqrt{R^2 - h^2/4})^2 \right] dx \\ &= 2\pi \int_{-h/2}^{h/2} \left(R^2 - x^2 - R^2 + h^2/4 \right) dx \\ &= 2\pi \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h^2}{4} - x^2 \right) dx = 2\pi \left[\frac{h^2}{4} x - \frac{x^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} \\ &= 2\pi \left[\frac{h^3}{8} - \frac{h^3}{24} \right] = \frac{4\pi \cdot h^3}{24} \end{aligned}$$