MAT 2453 - Prova Substitutiva
Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I
30.06.2009

(A)

Nome:____
No. USP:____________________ RG:____________________
Turma:____________________ Professor:____________________
Assinatura:____

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

Justifique todas as suas respostas. Boa prova!

1-) (4,0 pontos) Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(0) = 0$ e $f(x) = x^2 \ln|2x|$ se $x \neq 0$.

(a) Mostre que f é derivável no zero e calcule $f'(0)$. Existe $f''(0)$?

(b) Analise o sinal de f' e de f''.

(c) Esboce o gráfico de f, levando-se em conta os intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade e limites em $\pm\infty$. Indique os pontos críticos e os pontos de inflexão.

(a) $$\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}}_{f'(0)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \ln|2x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln|2x|}{\frac{1}{x}} \underset{\substack{L'H \\ \frac{\infty}{\infty}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$f'(x) = 2x \ln|2x| + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x\,(2\ln|2x| + 1), \quad x \neq 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} (2\ln|2x|+1) = -\infty. \text{ Logo, } f''(0) \nexists.$$

(b) $f'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $\left(\ln|2x| = -\frac{1}{2} \iff 2x = \pm e^{-\frac{1}{2}} \iff x = \frac{\pm 1}{2\sqrt{e}}\right.$

$|2x| > e^{-\frac{1}{2}} \iff 2\ln|2x| + 1 > 0$

$$\begin{array}{ccccccc} f'<0 & & f'>0 & & f'<0 & & f'>0 \\ \searrow & -\frac{1}{2\sqrt{e}} & \nearrow & 0 & \searrow & \frac{1}{2\sqrt{e}} & \nearrow \end{array}$$

$$f''(x) = 2\ln|2x| + 1 + x \cdot \frac{2}{x} = 2\ln|2x| + 3 = 0 \iff x = \frac{\pm 1}{2e^{\frac{3}{2}}}$$

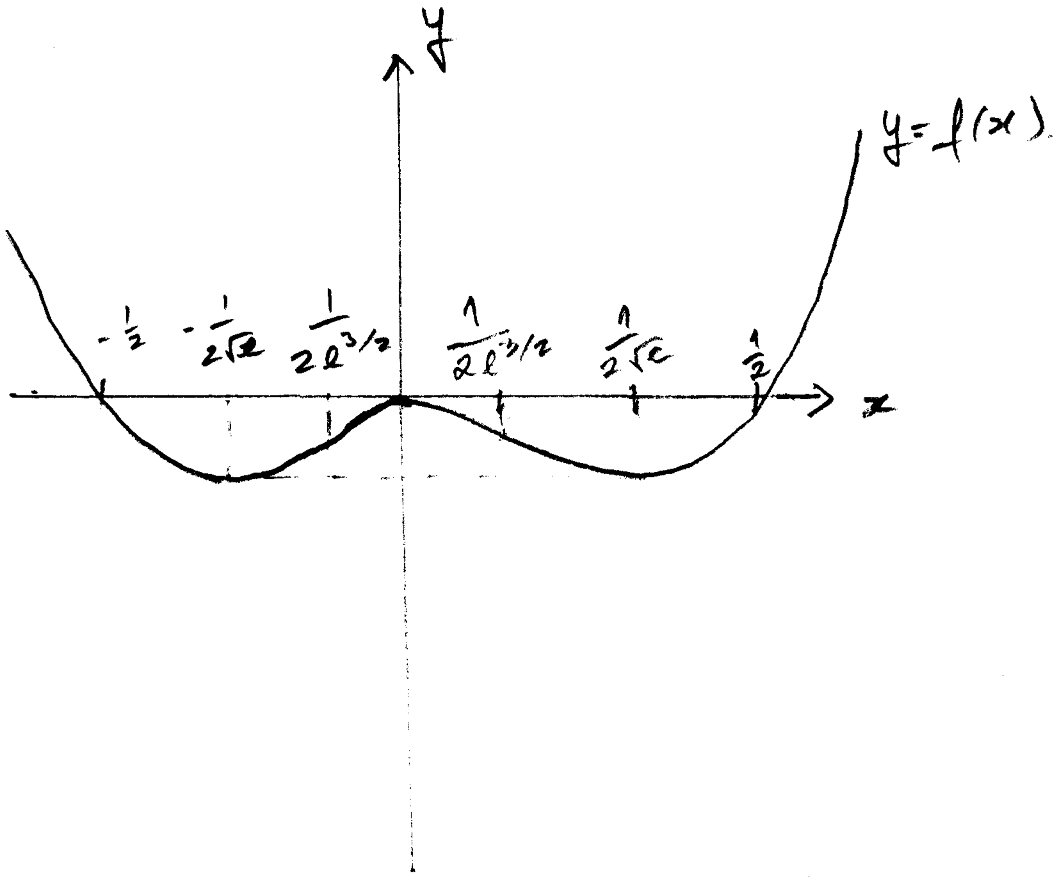
$$\begin{array}{ccccccc} f''>0 & & f''<0 & & f''<0 & & f''>0 \\ \cup & -\frac{1}{2e^{3/2}} & \cap & 0 & \cap & \frac{1}{2e^{3/2}} & \end{array}$$

Pontos de mínimo local: $-\frac{1}{2\sqrt{e}}$ e $+\frac{1}{2\sqrt{e}}$

Ponto de máximo local: 0

Pontos de inflexão: $-\frac{1}{2e^{3/2}}$ e $+\frac{1}{2e^{3/2}}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^2 \ln|2x| = +\infty.$$



$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \left(|2x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}\right)$$

2-) (1,5 pontos) Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, considere $g(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} f(t)\, dt$. Calcule $g'(0)$.

$$g'(x) = 2x e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} f(t)\, dt + e^{x^2} \cdot e^{-x^2} \cdot f(x)$$

$$g'(0) = 0 + f(0) = f(0).$$