4) Mostre que a função $V : (0,a) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{(a-x)^\beta}$, onde $a, \alpha, \beta > 0$ tem um único ponto de mínimo em $(0,a)$.

Resolução:

Dados $a, \alpha, \beta > 0$, seja V $: (0,a) \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{(a-x)^\beta}$. Tal função é duas vezes derivável, sendo $\mathrm{V}', \mathrm{V}'' : (0,a) \to \mathbb{R}$ dadas, respectivamente, por $x \mapsto \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}} + \frac{\beta}{(a-x)^{\beta+1}}$ e $x \mapsto \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^{\alpha+2}} + \frac{\beta(\beta+1)}{(a-x)^{\beta+2}}$. Portanto, V$''$ é estritamente positiva, donde, pelo teorema do valor médio, V$'$ é estritamente crescente. Além disso, tomando-se $g : [0,a] \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto -\alpha(a-x)^{\beta+1} + \beta x^{\alpha+1}$, tem-se $\forall x \in (0,a)$, $\mathrm{V}'(x) = \frac{g(x)}{x^{\alpha+1}(a-x)^{\beta+1}}$. Como g é contínua, $g(0) = -\alpha a^{\beta+1} < 0$ e $g(a) = \beta a^{\beta+1} > 0$, segue-se do teorema do valor intermediário que existe $x_0 \in (0,a)$ tal que $g(x_0) = 0$, donde $\mathrm{V}'(x_0) = 0$. Assim, pelo fato de ser V$'$ estritamente crescente, conclui-se que $\mathrm{V}' < 0$ em $(0, x_0)$ e $\mathrm{V}' > 0$ em (x_0, a), donde, novamente pelo teorema do valor médio, V é estritamente decrescente em $(0, x_0]$ e estritamente crescente em $[x_0, a)$. Portanto, x_0 é o único ponto de mínimo de V.