Questão 1. a) (2,0 pontos) Seja

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \frac{4}{x^2}\ ,\ 0 \leq y \leq \frac{x}{2}\ \text{ e }\ 0 \leq x \leq 4\}.$$

Determine o volume do sólido obtido pela rotação de R em torno da reta $y = 3$.

b) (2,0 pontos) Determine as dimensões do retângulo de maior área cuja base está sobre o eixo Ox e seus vértices superiores estão sobre a curva $y = 2e^{\frac{1}{2}-x^2}$.

Solução. a) O volume do sólido é dado por $V = \int_0^4 A(x)\,dx$, onde $A = A(x)$ é a área da intersecção do sólido com o plano perpendicular ao eixo Ox passando pelo ponto $(x,0,0)$. Como as secções são coroas circulares, temos

$$A(x) = \begin{cases} \pi 3^2 - \pi(3 - \frac{x}{2})^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \pi 3^2 - \pi(3 - \frac{4}{x^2})^2, & \text{se } 2 < x \leq 4, \end{cases}$$

pois a intesecção das curvas $y = \frac{4}{x^2}$ e $y = \frac{x}{2}$ é o ponto $(2,1)$. Portanto,

$$A(x) = \begin{cases} \pi(3x - \frac{x^2}{4}), & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \pi(\frac{24}{x^2} - \frac{16}{x^4}), & \text{se } 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi(3x - \frac{x^2}{4})\,dx + \int_2^4 \pi(24x^{-2} - 16x^{-4})\,dx \\ &= \pi\left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right]_0^2 + \pi\left[-\frac{24}{x} + \frac{16}{3x^3}\right]_2^4 \\ &= \pi\left[(6 - \frac{2}{3}) + (-6 + \frac{1}{12}) - (-12 + \frac{2}{3})\right] \\ &= \pi\left[12 - \frac{4}{3} + \frac{1}{12}\right] = \frac{129\pi}{12}. \end{aligned}$$

b) Seja h a altura do retângulo e b sua base. Como a curva $y = 2e^{\frac{1}{2}-x^2}$ é simétrica em relação ao eixo Oy, devemos ter $b = 2a$ e $h = 2e^{\frac{1}{2}-a^2}$, onde $a > 0$. Portanto, para cada $a > 0$, a área do retângulo é $A = A(a) = 4ae^{\frac{1}{2}-a^2}$.

Consideremos a função $f(x) = 4xe^{\frac{1}{2}-x^2}$, definida para $x \geq 0$. Como f é contínua, $f(0) = 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, então f assume seu valor máximo num ponto a onde $f'(a) = 0$. Como

$$f'(x) = 4e^{\frac{1}{2}}e^{-x^2}(1 - 2x^2),$$

temos: f é crescente em $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ e decrescente em $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$; portanto, $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ é o ponto de máximo global de f. Logo, o retângulo de maior área tem base $\sqrt{2}$ e altura 2.

Observação: pela Regra de L'Hospital,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x\sqrt{e}}{e^{x^2}} \quad (\frac{\infty}{\infty}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\sqrt{e}}{2xe^{x^2}} = 0.$$

Questão 2. (3,0 pontos) Calcule

a) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{arcsen} x\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x^5+x+1}{x^3+x^2}\, dx.$

Solução.

a) Primeiro, usamos integração por partes: $u = \operatorname{arcsen} x$ e $dv = x^2\, dx$; portanto, $v = \frac{x^3}{3}$ e $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$. Dai,

$$\int x^2 \operatorname{arcsen} x\, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arcsen} x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Na integral resultante, usamos substituição: $1-x^2 = t$, de forma que $x^2 = 1-t$ e $x\, dx = -\frac{dt}{2}$ e assim

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{x^2\, x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{(1-t)\, dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \int (t^{-1/2} - t^{1/2})\, dt \\
&= -\frac{1}{2}(2t^{1/2} - \frac{2}{3}t^{3/2}) + C = \frac{1}{3}t^{3/2} - t^{1/2} + C = \frac{1}{3}t^{1/2}(t-3) + C \\
&= -\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int x^2 \operatorname{arcsen} x\, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arcsen} x + \frac{1}{9}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C.$$

b) Primeiro, dividimos os polinômios:

$$\frac{x^5+x+1}{x^3+x^2} = x^2 - x + 1 + \frac{-x^2+x+1}{x^2(x+1)}$$

e depois decompomos em frações parciais:

$$\begin{aligned}
\frac{-x^2+x+1}{x^2(x+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2}{x^2(x+1)} \\
&= \frac{(A+C)x^2 + (A+B)x + B}{x^2(x+1)}.
\end{aligned}$$

Resulta que $B = 1$, $A = 0$ e $C = -1$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^5+x+1}{x^3+x^2}\, dx &= \int \left(x^2 - x + 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\
&= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{x} - \ln|x+1| + C.
\end{aligned}$$

Questão 3. (1,5 pontos) a) Calcule $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{9-\ln x}}\,dx$.

b) (1,5 pontos) Encontre todas as funções contínuas $f :]0,\infty[\, \to \mathbb{R}$ e todos os números reais a tais que

$$2 + \int_a^{x^3} f(t)\,dt = e^{3x}\ , \quad \text{para todo} \ \ x > 0.$$

Solução. a) Fazemos a mudança de variável $9 - \ln x = u$. Temos $\ln x = 9 - u$ e $\frac{dx}{x} = -du$ e, portanto,

$$\begin{array}{lcl} x = 1 & \longrightarrow & u = 9 \\ x = e & \longrightarrow & u = 8. \end{array}$$

Logo, $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{9-\ln x}}\,dx = -\int_9^8 \frac{9-u}{\sqrt{u}}\,du = \int_8^9 (9u^{-1/2} - u^{1/2})\,du = \left[18\sqrt{u} - \frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_8^9.$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{9-\ln x}}\,dx = (54-18) - (36\sqrt{2} - \frac{32}{3}\sqrt{2}) = \frac{108 - 76\sqrt{2}}{3} \approx 0,17325641.$$

b) Seja $F :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ uma primitiva de f. Então, a equação dada é equivalente a

$$2 + [F(x^3) - F(a)] = e^{3x}\ , \quad \text{para todo} \ \ x > 0. \tag{1}$$

Derivando (1) com relação a x, obtemos $F'(x^3)3x^2 = 3e^{3x}$, isto é, $f(x^3) = x^{-2}e^{3x}$. Trocando x^3 por t, concluimos que

$$f(t) = t^{-2/3}e^{3\sqrt[3]{t}}\ , \quad \text{para todo} \ \ t > 0.$$

Fazendo $x = \sqrt[3]{a}$ em (1), obtemos

$$2 + [F(a) - F(a)] = e^{3\sqrt[3]{a}},$$

e portanto

$$a = \left(\frac{\ln 2}{3}\right)^3.$$