

Questão 1. a) (2,0 pontos) Seja

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \frac{4}{x^2}, 0 \leq y \leq \frac{x}{2} \text{ e } 0 \leq x \leq 3\}.$$

Determine o volume do sólido obtido pela rotação de R em torno da reta $y = 3$.

b) (2,0 pontos) Determine as dimensões do retângulo de maior área cuja base está sobre o eixo Ox e seus vértices superiores estão sobre a curva $y = 3e^{\frac{1}{2}-x^2}$.

Solução. a) O volume do sólido é dado por $V = \int_0^3 A(x) dx$, onde $A = A(x)$ é a área da intersecção do sólido com o plano perpendicular ao eixo Ox passando pelo ponto $(x, 0, 0)$. Como as secções são coroas circulares, temos

$$A(x) = \begin{cases} \pi 3^2 - \pi(3 - \frac{x}{2})^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \pi 3^2 - \pi(3 - \frac{4}{x^2})^2, & \text{se } 2 < x \leq 3, \end{cases}$$

pois a inteseção das curvas $y = \frac{4}{x^2}$ e $y = \frac{x}{2}$ é o ponto $(2, 1)$. Portanto,

$$A(x) = \begin{cases} \pi(3x - \frac{x^2}{4}), & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \pi(\frac{24}{x^2} - \frac{16}{x^4}), & \text{se } 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi(3x - \frac{x^2}{4}) dx + \int_2^3 \pi(24x^{-2} - 16x^{-4}) dx \\ &= \pi \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{12} \right]_0^2 + \pi \left[-\frac{24}{x} + \frac{16}{3x^3} \right]_2^3 \\ &= \pi \left[(6 - \frac{2}{3}) + (-8 + \frac{16}{81}) - (-12 + \frac{2}{3}) \right] \\ &= \pi \left[10 - \frac{4}{3} + \frac{16}{81} \right] = \frac{718\pi}{81}. \end{aligned}$$

b) Seja h a altura do retângulo e b sua base. Como a curva $y = 3e^{\frac{1}{2}-x^2}$ é simétrica em relação ao eixo Oy , devemos ter $b = 2a$ e $h = 3e^{\frac{1}{2}-a^2}$, onde $a > 0$. Portanto, para cada $a > 0$, a área do retângulo é $A = A(a) = 6ae^{\frac{1}{2}-a^2}$.

Consideremos a função $f(x) = 6xe^{\frac{1}{2}-x^2}$, definida para $x \geq 0$. Como f é contínua, $f(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, então f assume seu valor máximo num ponto a onde $f'(a) = 0$.

Como

$$f'(x) = 6e^{\frac{1}{2}-x^2}(1 - 2x^2),$$

temos: f é crescente em $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ e decrescente em $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$; portanto, $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ é o ponto de máximo global de f . Logo, o retângulo de maior área tem base $\sqrt{2}$ e altura 3.

Observação: pela Regra de L'Hospital,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x\sqrt{e}}{e^{x^2}} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6\sqrt{e}}{2xe^{x^2}} = 0.$$

Questão 2. (3,0 pontos) Calcule

a) $\int x^2 \arcsen x \, dx$

b) $\int \frac{x^5 + x + 4}{x^3 + x^2} \, dx.$

Solução.

a) Primeiro, usamos integração por partes: $u = \arcsen x$ e $dv = x^2 \, dx$; portanto, $v = \frac{x^3}{3}$ e $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$. Dai,

$$\int x^2 \arcsen x \, dx = \frac{x^3}{3} \arcsen x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Na integral resultante, usamos substituição: $1-x^2 = t$, de forma que $x^2 = 1-t$ e $x \, dx = -\frac{dt}{2}$ e assim

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{x^2 x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{(1-t) \, dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \int (t^{-1/2} - t^{1/2}) \, dt \\ &= -\frac{1}{2} (2t^{1/2} - \frac{2}{3}t^{3/2}) + C = \frac{1}{3}t^{3/2} - t^{1/2} + C = \frac{1}{3}t^{1/2}(t-3) + C \\ &= -\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int x^2 \arcsen x \, dx = \frac{x^3}{3} \arcsen x + \frac{1}{9}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C.$$

b) Primeiro, dividimos os polinômios:

$$\frac{x^5 + x + 1}{x^3 + x^2} = x^2 - x + 1 + \frac{-x^2 + x + 4}{x^2(x+1)}$$

e depois decompomos em frações parciais:

$$\begin{aligned} \frac{-x^2 + x + 4}{x^2(x+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2}{x^2(x+1)} \\ &= \frac{(A+C)x^2 + (A+B)x + B}{x^2(x+1)}. \end{aligned}$$

Resulta que $B = 4$, $A = -3$ e $C = 2$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + x + 1}{x^3 + x^2} \, dx &= \int \left(x^2 - x + 1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x+1} \right) \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 3 \ln|x| - \frac{4}{x} + 2 \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

Questão 3. (1,5 pontos) a) Calcule $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{4-\ln x}} dx$.

b) (1,5 pontos) Encontre todas as funções contínuas $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ e todos os números reais a tais que

$$3 + \int_a^{x^3} f(t) dt = e^{3x}, \text{ para todo } x > 0.$$

Solução. a) Fazemos a mudança de variável $4 - \ln x = u$. Temos $\ln x = 4 - u$ e $\frac{dx}{x} = -du$ e, portanto,

$$\begin{aligned} x = 1 &\longrightarrow u = 4 \\ x = e &\longrightarrow u = 3. \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{4-\ln x}} dx = - \int_4^3 \frac{4-u}{\sqrt{u}} du = \int_3^4 (4u^{-1/2} - u^{1/2}) du = \left[8\sqrt{u} - \frac{2}{3}u\sqrt{u} \right]_3^4.$$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{4-\ln x}} dx = \left(16 - \frac{16}{3}\right) - (8\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) = \frac{32 - 18\sqrt{3}}{3} \approx 0,27436182.$$

b) Seja $F :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de f . Então, a equação dada é equivalente a

$$3 + [F(x^3) - F(a)] = e^{3x}, \text{ para todo } x > 0. \quad (1)$$

Derivando (1) com relação a x , obtemos $F'(x^3)3x^2 = 3e^{3x}$, isto é, $f(x^3) = x^{-2}e^{3x}$. Trocando x^3 por t , concluímos que

$$f(t) = t^{-2/3}e^{3\sqrt[3]{t}}, \text{ para todo } t > 0.$$

Fazendo $x = \sqrt[3]{a}$ em (1), obtemos

$$3 + [F(a) - F(a)] = e^{3\sqrt[3]{a}},$$

e portanto

$$a = \left(\frac{\ln 3}{3}\right)^3.$$