Questão 2. (Valor: 3.0) Seja $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}\,\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x})$. - B -

a) Calcule $f'(2)$.

b) Calcule $f'(0)$.

c) Seja $g(x) = \dfrac{(4 + f(x))(3x + 2\sec x)}{x + \mathrm{tg}\, x + 4}$, onde f é a função dada acima. Calcule $g'(0)$.

Solução. a) Seja $G(x) = \sqrt[3]{x}$. Se $x_0 \neq 0$, então G é derivável em x_0. Se $x_0 \neq 0$ e $x_0 \neq 1$, então $x_0^3 - x_0^2 = x_0^2(x_0 - 1) \neq 0$ e portanto G é derivável em x_0. Assim, se $x \neq 0$ e $x \neq 1$, podemos calcular $f'(x)$ usando a regra da cadeia e as regras de derivação para soma e produto:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^3 - x^2)^{-2/3} \cdot (3x^2 - 2x) \cdot \mathrm{sen}(x^{1/3}) + (x^3 - x^2)^{1/3} \cdot \cos(x^{1/3}) \cdot \frac{1}{3}x^{-2/3}.$$

Logo

$$\begin{aligned} f'(2) &= \frac{1}{3}(4)^{-2/3} \cdot (8) \cdot \mathrm{sen}(2^{1/3}) + (4)^{1/3} \cdot \cos(2^{1/3}) \cdot \frac{1}{3} \cdot 2^{-2/3} \\ &= \frac{2\sqrt[3]{4}}{3}\,\mathrm{sen}(\sqrt[3]{2}) + \frac{1}{3}\cos(\sqrt[3]{2}). \end{aligned}$$

b) Como $G(x) = \sqrt[3]{x}$ não é derivável em $x_0 = 0$, vamos calcular $f'(0)$ usando a definição de derivada. Como $f(0) = 0$, temos

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x^2}\,\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x})}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x^2}}{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \frac{\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} \\ &= \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{\frac{x^4 - x^3}{x^3}} \cdot \frac{\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}. \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\mathrm{sen}\, t}{t} = 1$ e $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[3]{x} = 0$, temos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{\frac{x^4 - x^3}{x^3}} = \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x - 1} = -1,$$

e portanto $f'(0) = -1$.

c) $g(x) = \dfrac{(4 + f(x))(3x + 2\sec x)}{x + \mathrm{tg}\, x + 4}$.

Sejam $h(x) = 3x + 2\sec x$ e $p(x) = x + \mathrm{tg}\, x + 4$. Então

$$g'(x) = \frac{[f'(x)h(x) + (4 + f(x))h'(x)]p(x) - [(4 + f(x))h(x)]p'(x)}{[p(x)]^2}$$

$$g'(0) = \frac{[f'(0)h(0) + (4 + f(0))h'(0)]p(0) - [(4 + f(0))h(0)]p'(0)}{[p(0)]^2}$$

e como $h'(x) = 3 + 2\sec(x)\,\mathrm{tg}(x)$ e $p'(x) = 1 + \sec^2(x)$, temos

$h'(0) = 3 + 2\sec(0)\,\mathrm{tg}(0) = 3$ e $p'(0) = 1 + \sec^2(0) = 2$.

Portanto

$$g'(0) = \frac{[(-1) \cdot 2 + 4 \cdot 3] \cdot 4 - [4 \cdot 2] \cdot 2}{16} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}.$$