Questão 3) (Valor: 2.0) Seja f derivável num intervalo aberto I contendo $x = -1$ e tal que

$$(f(x))^3 - (f(x))^2 + xf(x) = 2, \ \forall x \in I.$$

Encontre $f(-1)$ e a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(-1, f(-1))$.

Resolução:

Se $y = f(-1)$, então $y^3 - y^2 - y = 2$

$$y^3 - y^2 - y - 2 = 0 \ \Rightarrow \ (y-2)\underbrace{(y^2+y+1)}_{\Delta < \ 0} = 0$$

$\Rightarrow y = 2$ é única solução real da equação.
$\Rightarrow f(-1) = 2$.

$$(f(x))^3 - (f(x))^2 + xf(x) = 2$$

$$\Rightarrow \ 3(f(x))^2 f'(x) - 2f(x)f'(x) + f(x) + xf'(x) = 0$$

$$(x = -1) \ \Rightarrow \ 3(f(-1))^2 f'(-1) - 2f(-1)f'(-1) + f(-1) - 1.f'(-1) = 0$$

$$12f'(-1) - 4f'(-1) + 2 - f'(-1) = 0$$

$$\Rightarrow f'(-1) = -\frac{2}{7}$$

Portanto, a equação da reta tangente procurada é:

$$y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1)),$$

ou seja,

$$y - 2 = -\frac{2}{7}(x+1) \text{ ou } 2x + 7y - 12 = 0.$$