Questão 3) (Valor: 2.0) Seja f derivável num intervalo aberto I contendo $x = 1$ e tal que

$$(f(x))^3 - (f(x))^2 - xf(x) = 2, \ \forall x \in I.$$

Encontre $f(1)$ e a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, f(1))$.

Resolução:

Se $y = f(1)$, então $y^3 - y^2 - y = 2$

$$y^3 - y^2 - y - 2 = 0 \ \Rightarrow \ (y-2)\underbrace{(y^2 + y + 1)}_{\Delta < \ 0} = 0$$

$\Rightarrow y = 2$ é única solução real da equação.
$\Rightarrow f(1) = 2.$

$$(f(x))^3 - (f(x))^2 - xf(x) = 2$$
$$\Rightarrow \ 3(f(x))^2 f'(x) - 2f(x)f'(x) - f(x) - xf'(x) = 0$$
$$(x = 1) \ \Rightarrow \ 3(f(1))^2 f'(1) - 2f(1)f'(1) - f(1) - 1.f'(1) = 0$$
$$12f'(1) - 4f'(1) - 2 - f'(1) = 0$$
$$\Rightarrow f'(1) = \frac{2}{7}$$

Portanto, a equação da reta tangente procurada é:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1),$$

ou seja,

$$y - 2 = \frac{2}{7}(x-1) \text{ ou } 2x - 7y + 12 = 0.$$