**Questão 4)** (Valor: 2.0) Num filtro com formato de cone, como na figura, um líquido escoa da parte superior para a parte inferior passando por um orifício de dimensões desprezíveis. Num certo instante, a altura $H$ do líquido depositado na parte inferior é 8 cm, a altura $h$ do líquido da parte superior é 10 cm e $h$ está diminuindo a uma taxa de variação instantânea de 2 cm por minuto. Calcule a taxa de variação de $H$ em relação ao tempo nesse instante.

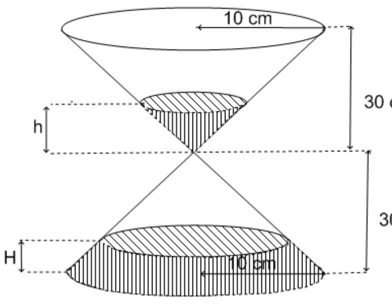


Figura 1

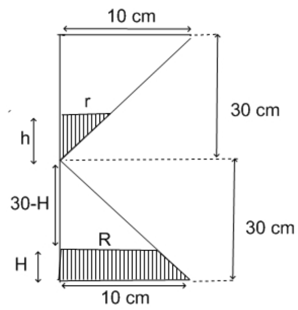


Figura 2

Resolução:

Por hipótese temos: $H(t_0) = 8$ cm, $h(t_0) = 10$ cm e $\dfrac{dh}{dt}(t_0) = -2$ cm/min.

Pela figura 2, obtemos as seguintes relações utilizando a semelhança dos triângulos:

$\dfrac{r}{10} = \dfrac{h}{30} \quad \Rightarrow \quad r = \dfrac{h}{3}$. E também $\dfrac{R}{10} = \dfrac{30-H}{30} \quad \Rightarrow \quad R = \dfrac{30-H}{3}$.

Sejam $V_1$ o volume do líquido depositado na parte superior e $V_2$ o volume do líquido na parte inferior.

$$V_1(t) = \frac{\pi}{3}(r(t))^2 h(t)$$

$$V_1(t) = \frac{\pi}{3}\frac{(h(t))^3}{9}$$

$$\frac{dV_1}{dt}(t) = \frac{\pi}{9}(h(t))^2 \frac{dh}{dt}(t)$$

$$\frac{dV_1}{dt}(t_0) = \frac{\pi}{9}(h(t_0))^2 \frac{dh}{dt}(t_0)$$

$$\frac{dV_1}{dt}(t_0) = \frac{\pi}{9}.100.(-2)$$

$$V_2(t) = \frac{\pi}{3}(10)^2 30 - \frac{\pi}{3}(R(t))^2(30 - H(t))$$

$$V_2(t) = \frac{\pi}{3}(10)^2 30 - \frac{\pi}{3}\frac{(30 - H(t))^3}{9}$$

$$\frac{dV_2}{dt}(t) = -\frac{\pi}{9}(30 - H(t))^2 \left(-\frac{dH}{dt}(t)\right)$$

$$\frac{dV_2}{dt}(t_0) = -\frac{\pi}{9}(30 - H(t_0))^2 \left(-\frac{dH}{dt}(t_0)\right)$$

$$\frac{dV_2}{dt}(t_0) = \frac{\pi}{9}.484.\frac{dH}{dt}(t_0)$$

Como $\dfrac{dV_1}{dt}(t_0) = -\dfrac{dV_2}{dt}(t_0)$, temos $\dfrac{\pi}{9}.100.(-2) = -\dfrac{\pi}{9}.484.\dfrac{dH}{dt}(t_0)$.

Ou seja, $\dfrac{dH}{dt}(t_0) = \dfrac{50}{121}$ cm/min.