Questão 4) (Valor: 2.0) Num filtro com formato de cone, como na figura, um líquido escoa da parte superior para a parte inferior passando por um orifício de dimensões desprezíveis. Num certo instante, a altura H do líquido depositado na parte inferior é 5 cm, a altura h do líquido da parte superior é 20 cm e h está diminuindo a uma taxa de variação instantânea de 0,5 cm por minuto. Calcule a taxa de variação de H em relação ao tempo nesse instante.

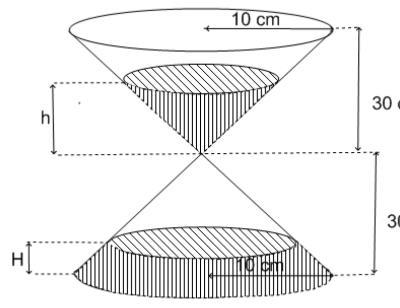

Figura 1

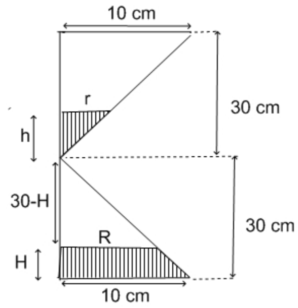

Figura 2

Resolução:

Por hipótese temos: $H(t_0) = 5$ cm, $h(t_0) = 20$ cm e $\dfrac{dh}{dt}(t_0) = -0,5$ cm/min.

Pela figura 2, obtemos as seguintes relações utilizando a semelhança dos triângulos:

$\dfrac{r}{10} = \dfrac{h}{30} \quad \Rightarrow \quad r = \dfrac{h}{3}$. E também $\dfrac{R}{10} = \dfrac{30-H}{30} \quad \Rightarrow \quad R = \dfrac{30-H}{3}$.

Sejam V_1 o volume do líquido depositado na parte superior e V_2 o volume do líquido na parte inferior.

$V_1(t) = \dfrac{\pi}{3}(r(t))^2 h(t)$	$V_2(t) = \dfrac{\pi}{3}(10)^2 30 - \dfrac{\pi}{3}(R(t))^2(30 - H(t))$
$V_1(t) = \dfrac{\pi}{3}\dfrac{(h(t))^3}{9}$	$V_2(t) = \dfrac{\pi}{3}(10)^2 30 - \dfrac{\pi}{3}\dfrac{(30-H(t))^3}{9}$
$\dfrac{dV_1}{dt}(t) = \dfrac{\pi}{9}(h(t))^2\dfrac{dh}{dt}(t)$	$\dfrac{dV_2}{dt}(t) = -\dfrac{\pi}{9}(30 - H(t))^2\left(-\dfrac{dH}{dt}(t)\right)$
$\dfrac{dV_1}{dt}(t_0) = \dfrac{\pi}{9}(h(t_0))^2\dfrac{dh}{dt}(t_0)$	$\dfrac{dV_2}{dt}(t_0) = -\dfrac{\pi}{9}(30 - H(t_0))^2\left(-\dfrac{dH}{dt}(t_0)\right)$
$\dfrac{dV_1}{dt}(t_0) = \dfrac{\pi}{9}.400.(-0,5)$	$\dfrac{dV_2}{dt}(t_0) = \dfrac{\pi}{9}.625.\dfrac{dH}{dt}(t_0)$

Como $\dfrac{dV_1}{dt}(t_0) = -\dfrac{dV_2}{dt}(t_0)$, temos $\dfrac{\pi}{9}.400.(-0.5) = -\dfrac{\pi}{9}.625.\dfrac{dH}{dt}(t_0)$.

Ou seja, $\dfrac{dH}{dt}(t_0) = \dfrac{8}{25}$ cm/min.