A

Questão 1: Considere a parábola $y = bx^2$, com $b \geq 1$. Faça um esboço da região compreendida entre a parábola e a reta $y = x$, com $0 \leq x \leq 1$.

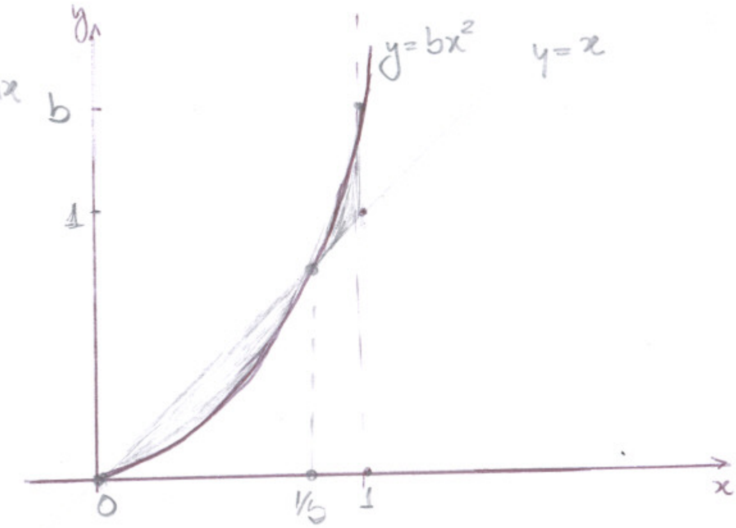
a) (1,5) Calcule a área desta região em termos de b.

b) (1,5) Determine, se existir, $b \in [1, 3]$ para o qual a área é máxima. Justifique.

a) Área $= \int_0^{1/b} [x - bx^2]\,dx + \int_{1/b}^{1} [bx^2 - x]\,dx$

$= \left.\frac{x^2}{2} - \frac{bx^3}{3}\right]_0^{1/b} + \left.\frac{bx^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{1/b}^{1} =$

$= \frac{1}{3b^2} + \frac{b}{3} - \frac{1}{2}$



b) A função $A(b) = \frac{1}{3b^2} + \frac{b}{3} - \frac{1}{2}$ é contínua no intervalo fechado $[1,3]$. Pelo Teorema de Weierstrass, A tem máximo e mínimo neste intervalo.

$A'(b) = \frac{-2}{3b^3} + \frac{1}{3}$

	1	$\sqrt[3]{2}$	3
A'	$-$		$+$
A	$\searrow$		$\nearrow$

O máximo de A, com $b \in [1,3]$ pode ser $A(1)$ ou $A(3)$.

$A(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$A(3) = \frac{1}{27} + 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{29}{54}}$

Ponto de máximo de A é $(3, 29/54)$