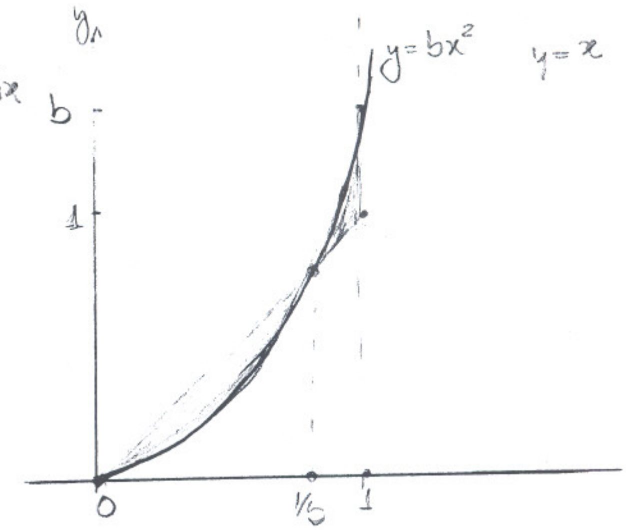
B

Questão 1: Considere a parábola $y = bx^2$, com $b \geq 1$. Faça um esboço da região compreendida entre a parábola e a reta $y = x$, com $0 \leq x \leq 1$.

a) (1,5) Calcule a área desta região em termos de b.

b) (1,5) Determine, se existir, $b \in [1, 2]$ para o qual a área é máxima. Justifique.

a) $\text{Área} = \int_0^{1/b} [x - bx^2]\,dx + \int_{1/b}^{1} [bx^2 - x]\,dx$



$= \left.\frac{x^2}{2} - \frac{bx^3}{3}\right]_0^{1/b} + \left.\frac{bx^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{1/b}^{1} =$

$= \frac{1}{3b^2} + \frac{b}{3} - \frac{1}{2}$

b) A função $A(b) = \frac{1}{3b^2} + \frac{b}{3} - \frac{1}{2}$ é contínua no intervalo fechado $[1,2]$. Pelo Teorema de Weierstrass, A tem máximo e mínimo no intervalo.

$A'(b) = \frac{-2}{3b^3} + \frac{1}{3} = \frac{-2 + b^3}{3b^3}$

	1 — $\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}$ — 2
A'	−	+
A	↘	↗

$b = \sqrt[3]{2}$ é mínimo e
o máximo será $b = 1$ ou $b = 2$

$A(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$A(2) = \frac{1}{12} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Logo, $(2, 1/4)$ é o máximo para $A(b)$ com $b \in [1,2]$.