

MAT2453 - POLI
Gabarito - P2 - Questão 3
Prova Tipo A

- (a) Temos que $(1 + 3x)^{1/\arctan x} = e^{\frac{\ln(1+3x)}{\arctan x}}$. Além disso, pela regra de L'Hospital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{\arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{1+3x}}{\frac{1}{1+x^2}} = 3.$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{\arctan x}} = e^3$.

- (b) Como $f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 3 \geq 3$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue que

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \leq \frac{1}{3},$$

para qualquer $y \in \mathbb{R}$. Pelo teorema do valor médio, concluímos que dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$g(b) - g(a) = g'(c)(b - a) \leq \frac{1}{3}(b - a),$$

como queríamos.