Questão 1-A. a) (2,0 pontos) Esboce o gráfico da função

$$f(x) = 3x^{2/3} + \frac{5}{x^{1/3}},$$

indicando domínio, intervalos de crescimento e de decrescimento, concavidade, pontos de inflexão, assíntotas, etc.

b) (1,5 pontos) Um triângulo retângulo de hipotenusa $\sqrt{3}$ gira em torno de um de seus catetos gerando um cone. Determine o raio da base, a altura e o volume do cone de maior volume que pode ser gerado dessa maneira.

Solução: a) Domínio de $f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Intervalos de crescimento e decrescimento:

$$f'(x) = 2x^{-1/3} - \frac{5}{3}x^{-4/3} = \frac{6x-5}{3x^{4/3}}.$$

Assim, f é crescente em $[\frac{5}{6}, +\infty[$ e decrescente em $]-\infty, 0[$ e $]0, \frac{5}{6}]$. Vemos então que $x = \frac{5}{6}$ é ponto de mínimo local.

Concavidade:

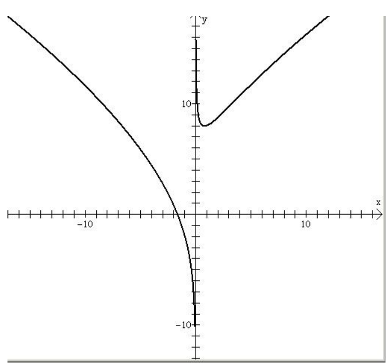
$$f''(x) = \frac{18x^{4/3} - 4x^{1/3}(6x-5)}{9x^{8/3}} = \frac{x^{1/3}(20-6x)}{9x^{8/3}} = \frac{(20-6x)}{9x^{7/3}}.$$

Logo, f tem concavidade para cima em $]0, \frac{10}{3}]$ e para baixo em $]-\infty, 0[$ e $]\frac{10}{3}, +\infty[$. Assim, $x = \frac{10}{3}$ é ponto de inflexão.

Limites: Os limites necessários são calculados diretamente:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty; \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Assíntotas: f possui assíntota vertical, a reta $x = 0$. f não possui assíntota horizontal, pois $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ e nem assíntota inclinada, pois $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.



b) O volume do cone é dado por $V = \frac{1}{3}\pi h r^2$, onde h e r são os catetos do triângulo. Como $r^2 = 3 - h^2$ segue que $V(h) = \frac{1}{3}\pi h(3-h^2)$, com $h \in]0, \sqrt{3}[$. Temos que $V'(h) = \frac{\pi}{3}(3-3h^2)$ e portanto V cresce em $]0, 1]$ e decresce em $[1, \sqrt{3}]$. Então o volume máximo ocorre quando $h = 1$. Neste caso, $r = \sqrt{2}$ e $V = \frac{2\pi}{3}$.