

**Questão 1-B.** a) (2,0 pontos) Esboce o gráfico da função

$$f(x) = 5x^{2/3} + \frac{3}{x^{1/3}},$$

indicando domínio, intervalos de crescimento e de decrescimento, concavidade, pontos de inflexão, assíntotas, etc.

b) (1,5 pontos) Um triângulo retângulo de hipotenusa  $\sqrt{5}$  gira em torno de um de seus catetos gerando um cone. Determine o raio da base, a altura e o volume do cone de maior volume que pode ser gerado dessa maneira.

**Solução:** a) Domínio de  $f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Intervalos de crescimento e decrescimento:**

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^{-1/3} - x^{-4/3} = \frac{10x - 3}{3x^{4/3}}.$$

Assim,  $f$  é crescente em  $[\frac{3}{10}, +\infty[$  e decrescente em  $] - \infty, 0[$  e  $]0, \frac{3}{10}]$ . Vemos então que  $x = \frac{3}{10}$  é ponto de mínimo local.

**Concavidade:**

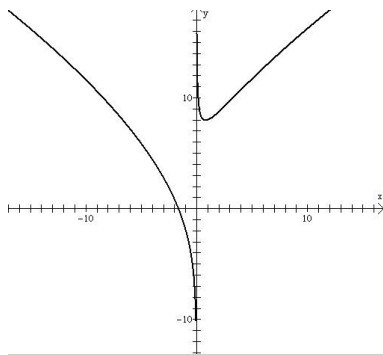
$$f''(x) = \frac{30x^{4/3} - 4x^{1/3}(10x - 3)}{9x^{8/3}} = \frac{x^{1/3}(12 - 10x)}{9x^{8/3}} = \frac{12 - 10x}{9x^{7/3}}.$$

Logo,  $f$  tem concavidade para cima em  $]0, \frac{6}{5}]$  e para baixo em  $] - \infty, 0[$  e  $] \frac{6}{5}, +\infty[$ . Assim,  $x = \frac{6}{5}$  é ponto de inflexão.

**Limites:** Os limites necessários são calculados diretamente:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

**Assíntotas:**  $f$  possui assíntota vertical, a reta  $x = 0$ .  $f$  não possui assíntota horizontal, pois  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$  e nem assíntota inclinada, pois  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .



b) O volume do cone é dado por  $V = \frac{1}{3}\pi hr^2$ , onde  $h$  e  $r$  são os catetos do triângulo. Como  $r^2 = 5 - h^2$  segue que  $V(h) = \frac{1}{3}\pi h(5 - h^2)$ , com  $h \in ]0, \sqrt{5}[$ . Temos que  $V'(h) = \frac{\pi}{3}(5 - 3h^2)$  e portanto  $V$  cresce em  $]0, \sqrt{5/3}]$  e decresce em  $[\sqrt{5/3}, \sqrt{5}]$ . Então o volume máximo ocorre quando  $h = \sqrt{5/3}$ . Neste caso,  $r = \sqrt{10/3}$  e  $V = \frac{10\pi}{9} \sqrt{\frac{5}{3}}$ .