Questão 3-B. A região R está contida no primeiro quadrante e é limitada pela curva

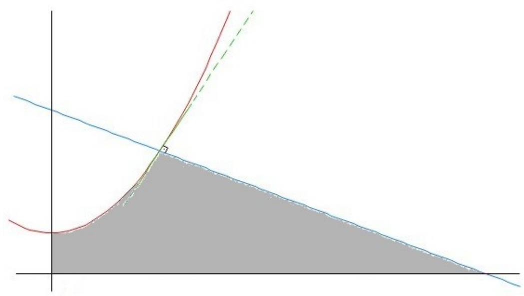
$$y = 2 + \frac{x^2}{2}$$

e pela reta normal a essa curva no ponto $(2,4)$.

a) (2,0 pontos) Calcule o perímetro de R.

b) (1,5 pontos) Determine o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo Ox.

Solução. Sejam $f(x) = 2 + \frac{x^2}{2}$, $O = (0,0)$, $B = (2,3)$ e $C = (0,2)$. A reta normal à curva $y = f(x)$ no ponto $(2,3)$ tem equação $y - 4 = -\frac{1}{2}(x-2)$ e, portanto, o ponto em que a normal corta o eixo Ox é $A = (10,0)$.



a) O perímetro de R é dado por

$$\begin{aligned} p &= \overline{OC} + \overline{OA} + \overline{AB} + \text{ arco } CB \\ &= 2 + 10 + 4\sqrt{5} + \textstyle\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,dx. \end{aligned}$$

Para calcular a ultima integral, usamos a mudança de variável $x = \operatorname{tg}\theta$ e depois integramos por partes:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2}\,dx &= \int \sec^3\theta\,dx = \int \sec\theta(1+\operatorname{tg}^2\theta)\,d\theta = \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + \int \operatorname{tg}\theta\ \operatorname{tg}\theta\sec\theta\,d\theta \\ &= \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + \operatorname{tg}\theta\sec\theta - \int \sec^3\theta\,d\theta. \end{aligned}$$

Segue então que

$$\int \sec^3\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\left[\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + \operatorname{tg}\theta\sec\theta\right]$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} p &= 2 + 10 + 4\sqrt{5} + \int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,dx \\ &= 12 + 4\sqrt{5} + \frac{1}{2}\left[\ln|x + \sqrt{1+x^2}| + x\sqrt{1+x^2}\right]_0^2 \\ &= 12 + 4\sqrt{5} + \frac{1}{2}[\ln(2+\sqrt{5}) + 2\sqrt{5}] \\ &= 12 + 5\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}) \end{aligned}$$

b) O volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo Ox é

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^2 (2+\frac{x^2}{2})^2\,dx + \pi \int_2^{10} (-\frac{x}{2}+5)^2\,dx \\
&= \pi \int_0^2 (4+2x^2+\frac{x^4}{4})\,dx + \pi \int_2^8 (25-5x+\frac{x^2}{4})\,dx \\
&= \pi \left.(4x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{20})\right|_0^2 + \pi \left.(25x-\frac{5x^2}{2}+\frac{x^3}{12})\right|_2^{10} \\
&= \pi \left[8+\frac{16}{3}+\frac{8}{5}+250-250+\frac{1000}{12}-50+10-\frac{2}{3}\right] \\
&= \frac{288\pi}{5}.
\end{aligned}
$$