# MAT2453 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I

## 1o. Semestre de 2008 - 2a. Lista de Exercícios

1. Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de $f(x) = x^3 - 2x + 1$ e $g(x) = -x + 1$, com $-1 \leq x \leq 1$. Resp.: $\frac{1}{2}$.

2. Desenhe a região $A = B \cap C \cap D$ e calcule a área de $A$, onde $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 4\}$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 12 - 3x^2\}$ e $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 3x^2 + 12x + 12\}$ Resp.: $\frac{104}{3}$.

3. Desenhe a região $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 1,\ y \leq x + 1 \text{ e } y \geq -x^2 - 3x - 2\}$ e calcule a sua área. Resp. $\frac{107}{24}$.

4. Sejam $f : [-1, 3] \to \mathbb{R}$ contínua com $f(x) \leq 0$, para todo $x \in [-1, 3]$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 3 \text{ e } y \geq f(x)\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 3 \text{ e } y \leq x^2 + 3\}$ tais que a área de $A \cap B$ seja igual a 23. Calcule $\int_{-1}^{3} f(x)\, dx$. Resp. $-\frac{5}{3}$.

5. Determine $m > 0$ para que a área delimitada por $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ e a reta $y = mx$ seja igual a 4. Resp. $m = 2$.

6. Desenhe a região do plano delimitada pela curva $y = x^3 - x$ e por sua reta tangente no ponto de abscissa $x = -1$. Calcule a área desta região. Resp. $\frac{27}{4}$.

7. Encontre a área da região limitada entre as curvas $x = y^3 - y$ e $x = 1 - y^4$. Resp. $\frac{8}{5}$.

8. Calcule $\int_0^1 (x + \sqrt{1 - x^2})\, dx$, interpretando-a como uma área. Resp. $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$.

9. Sejam $f(x) = x^3 + 5x - 6$ e $g$ a função inversa de $f$. Calcule $g'(x)$, $g''(x)$ e $g''(0)$. Resp. $g''(0) = -\frac{3}{256}$.

10. Sejam $y = f(x)$ dada por $f(x) = x^3 + \ln x$, $x > 0$ e $x = g(y)$ sua função inversa. Calcule $g'(y)$ em termos de $g(y)$. Calcule $g'(1)$. Resp. $g'(1) = 1/4$

11. Seja $h(x) = 2x + \cos x$.
    (a) Mostre que $h$ é bijetora.
    (b) Calcule $h^{-1}(1)$. Resp. 0
    (c) Admitindo $h^{-1}$ derivável, determine $(h^{-1})'(1)$. Resp. $\frac{1}{2}$

12. Seja $y = f(x)$ tal que $(x, f(x))$ é solução da equação $y^5 + ye^x + 3xe^{y+1} + 2 = 7 \operatorname{sen} x$, para todo $x$ no domínio de $f$, e seja $g$ a inversa de $f$. Supondo que $f$ e $g$ são funções deriváveis, determine a equação da reta tangente ao gráfico de $g$ no ponto de abscissa $-1$. Resp. $5y = 6x + 6$.

13. Sejam $I$ um intervalo de $\mathbb{R}$ com $I \subset ]-5, 1[$ e $f : I \to \mathbb{R}$ derivável tais que $(x, f(x))$ é solução da equação $2xy - 3x^2 + \operatorname{arctg}(y^2) + 27 = 0$, para todo $x \in I$. Determine a equação da reta que é normal ao gráfico de $f$ e paralela à reta $3y + x = 1$. Resp. $3y + x + 3 = 0$.

14. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

| | | |
|---|---|---|
| 1) $\cosh x := \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ | 2) $\sinh x := \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ | 3) $f(x) = e^{e^x}$ |
| 4) $f(x) = x^e + e^x$ | 5) $f(x) = e^{1/x^2} + \dfrac{1}{e^{x^2}}$ | 6) $f(x) = \ln(e^x + 1)$ |
| 7) $f(x) = (\ln x)^2 + (1 + 2^{x^3})^x$ | 8) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ | 9) $f(x) = x^\pi + \pi^x$ |
| 10) $f(x) = 2^{x^2} + 3^{2x}$ | 11) $f(x) = \ln(\operatorname{arctg} x)$ | 12) $f(x) = \left(1 + \cos^2 x\right)^{\operatorname{sen} x}$ |

13) $f(x) = (e^x + 3x)^{\text{arcsen}(x^2)}$ 14) $f(x) = (3 + \cos x)^{\text{tg}(x^2)}$ 15) $f(x) = \dfrac{\ln(x^3 + 2^{x^3})}{x^2 + e^{\cos x}}$

16) $f(x) = (x^2 + 1)^{\text{sen}(x^5)}$ 17) $f(x) = (1 + \text{arctg}\, x^2)^{1/x^4}$ 18) $f(x) = x^2 e^{\text{arctg}\, x}$

19) $f(x) = \dfrac{\text{tg }(3x)}{\text{arctg}(3x)}$ 20) $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

15. Use o TVM para provar as seguintes desigualdades:

(a) $|\text{sen } b - \text{sen } a| \le |b - a|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \le \frac{1}{2}|a - b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \ge 1$ e $b \ge 1$.

(c) $\left|\ln \frac{a}{b}\right| \le |a - b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \ge 1$ e $b \ge 1$.

(d) $b^b - a^a > a^a(b - a)$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ com $1 \le a < b$.

(e) $e^x - e^y \ge x - y$, para todos $x, y$ com $x \ge y \ge 0$.

16. Seja $f$ uma função derivável no intervalo $(-1, +\infty)$. Mostre que se $f(0) = 0$ e $0 < f'(x) \le 1$, para todo $x > 0$, então $0 < f(x) \le x$, para todos $x > 0$.

17. Mostre que $f(x) = (1 + x)^{1/x}$ é estritamente decrescente para $x > 0$. Conclua que $(1 + \pi)^e < (1 + e)^\pi$.

18. Prove as seguintes desigualdades:

1) $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$, para todo $x > 1$ 2) $e^\pi > \pi^e$

3) $\frac{\text{tg } b}{\text{tg } a} > \frac{b}{a}$ para $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ 4) $x - \frac{x^3}{3!} < \text{sen}\, x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, para $x > 0$

5) $\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{1}{2}x$, para $x > 0$ 6) $2x \,\text{arctg}\, x > \ln(1 + x^2)$, para $x > 0$

19. Seja $f$ derivável em $\mathbb{R}$ e seja $g$ dada por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \ne 0$. Suponha que $x_0$ é ponto de máximo local de $g$. Prove que $x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$. Prove que a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abscissa $x_0$ passa pela origem.

20. Determine a constante $a$ para que $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ tenha:

(a) um mínimo local em $x = 2$. Resp. $a = 16$.

(b) um mínimo local em $x = -3$. Resp. $a = -54$.

(c) Mostre que $f$ não terá máximo local para nenhum valor de $a$.

21. Calcule, caso exista

1) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{\ln(1 - 2x)}{\text{tg}(\pi x)}$ 2) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x^{100}}{\sqrt[5]{x}}$ 3) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\text{cotg } x}$

4) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\text{cotg } x}$ 5) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^{2x}}$ 6) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{e^{x^2}}$

7) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^p \ln x$, $p > 0$ 8) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\,\text{sen}(\frac{p}{x})$ 9) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{2}{x^2}\right)$

10) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{\ln(1 + x)} - \frac{1}{e^x - 1}\right]$ 11) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (x\,\text{sen}\, x)^{\text{tg} x}$ 12) $\displaystyle\lim_{x \to 0} (e^x + 3x)^{1/x}$

13) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^{\text{tg}(x^2)}$ 14) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left[\frac{1}{x} + \ln x\right]$ 15) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\text{arctg}(2x^2)}{\ln(1 + 3x^2)}$

16) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x\text{arctg} x}$ 17) $\displaystyle\lim_{x \to 0} (1 + \text{sen}\, 2x)^{\frac{1}{\text{sen}\, x}}$ 18) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x\,\text{sen }x + 2x^2}{e^x + e^{-x} - 2}$

19) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(\operatorname{tg} x \sec x - \sec^2 x)$ 20) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{e^{3x}}$ 21) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+3x)^{1/\ln x}$

22) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x)^{1/\ln x}$ 23) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(x+3)^{x+4} - \ln(x+2)^{x+4}\right]$

Resp. 1) 0, 2) 0, 3) 0, 4) 0, 5) 0, 6) 0, 7) $p$, 8) $\frac{1}{6}$, 9) 1, 10) 1, 11) $e^4$, 12) 1, 13) $+\infty$, 14) $\frac{2}{3}$, 15) 1, 16) $e^2$, 17) 3, 18) $-\frac{1}{2}$, 19) 0, 20) $e$, 21) 1, 22) $e$, 23) 1.

22. Determine $c$ para que a função $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + c$ tenha uma única raiz real. Resp. $c < -27$ ou $c > 5$.

23. Mostre que a equação $3x - 2 + \cos(\frac{\pi x}{2}) = 0$ tem exatamente uma raiz real.

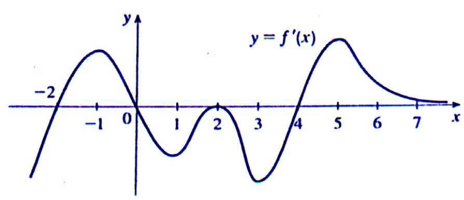
24. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{ax-1}{ax+1}\right)^x = 4$. Determine $a$. Resp. $a = -\frac{1}{\ln 2}$.

25. (a) Esboce o gráfico de $f(x) = x^2e^{-x}$.

(b) Determine, em função de $k$, o número de soluções reais da equação $ke^x = x^2$.

Resp. não há soluções se $k < 0$; 1 solução se $k = 0$ ou $k > \frac{4}{e^2}$; 2 soluções se $k = \frac{4}{e^2}$; 3 soluções se $0 < k < \frac{4}{e^2}$.

26. Seja $f$ uma função cuja derivada tem o gráfico esboçado na figura abaixo:




(a) Em que intervalos $f$ é crescente ou decrescente?

(b) Para quais valores de $x$ $f$ tem um máximo ou mínimo local?

(c) Em que intervalos $f$ tem concavidade para cima ou para baixo?

(d) Ache os pontos de inflexão de $f$.

(e) Admitindo que $f(0) = 0$, faça um esboço do possível gráfico de $f$.

27. (a) Ache o ponto de mínimo de $f(x) = \frac{e^x}{x}$ no intervalo $]0, +\infty[$. Resp. $x_0 = 1$.

(b) Prove que $\frac{e^{a+b}}{ab} \geq e^2$, para todos $a > 0$ e $b > 0$.

28. Esboce o gráfico das funções abaixo e dê as equações das assíntotas, quando existirem.

1) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$ 2) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ 3) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

4) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^3+1}$ 5) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$ 6) $f(x) = (3 - \dfrac{6}{x})e^{\frac{2}{x}}$

7) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ 8) $f(x) = e^x - e^{3x}$ 9) $f(x) = x - 3\ln x - \dfrac{2}{x}$

10) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ 11) $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$ 12) $f(x) = x^x$

13) $f(x) = \ln(2x) - \ln(3x^2+3)$ 14) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$ 15) $f(x) = \dfrac{(x-2)^3}{x^2}$

16) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x+2}$ 17) $f(x)=\operatorname{arctg}(\ln x)$ 18) $f(x)=\dfrac{x^3-x+1}{x^2}$

19) $f(x)=x^2\ln x$ 10) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ 21) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$

29. Achar os valores máximo e mínimo de:

    (a) $f(x)=\operatorname{sen} x-\cos x,\ x\in[0,\pi]$. Resp. $-1$; $\sqrt{2}$.

    (b) $f(x)=\sqrt{3+2x-x^3}$, $-\frac{1}{2}\le x\le 1$. Resp. $\sqrt{\frac{17}{8}}$; $\sqrt{3+\sqrt{\frac{32}{27}}}$.

    (c) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$, $\frac{1}{2}\le x\le 4$. Resp. 4; 1.

    (d) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-2x^2}$, $-1\le x\le 2$. Resp. $\sqrt[3]{-3}$; 0.

    (e) $f(x)=|x^4-2x^3|$, $0\le x\le 3$. Resp. 0; 27.

30. Para que números positivos $a$ a curva $y=a^x$ corta a reta $y=x$? Resp. $a\le e^{1/e}$.

31. Seja $f(x)$ um polinômio de grau 3, com três raízes reais distintas. Mostre que $f$ tem um ponto de inflexão, que é a média aritmética das três raízes.

32. Sejam $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivável e $a,b\in\mathbb{R}$ tais que $f(a)=f(b)=0$. Mostre que se $f'(a)f'(b)>0$, então existe $c$ entre $a$ e $b$ tal que $f(c)=0$.

33. Para que valores de $k$ a equação $2x^3-9x^2+12x=k$ tem três raízes reais distintas ? Resp. $4<k<5$.

34. Suponha que $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ seja contínua, $f(0)=1$ e que $f(x)$ é um número racional para todo $x\in[0,1]$. Prove que $f(x)=1$, para todo $x\in[0,1]$.

35. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função derivável até segunda ordem e seja $a\in\mathbb{R}$ fixado. Verifique se as afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique:

    (a) Se $f'(x)>0$, para todo $x>a$, então $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

    (b) Se $f'(x)>0$ e $f''(x)>0$, para todo $x>a$, então $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

36. Suponha que $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ é contínua e que $0\le f(x)\le 1$, para todo $x\in[0,1]$. Prove que existe $c\in[0,1]$ tal que $f(c)=c$.

37. Prove que se $p$ é um polinômio, a equação $e^x-p(x)=0$ não pode ter infinitas soluções reais.

38. Suponha que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é derivável e tem um único ponto crítico $x_0$. Prove que se $x_0$ for ponto de mínimo (máximo) local de $f$, então $x_0$ será o único ponto de mínimo (máximo) global de $f$.

39. Para que pontos da circunferência $x^2+y^2=25$ a soma das distâncias a (2,0) e (-2,0) é mínima? Resp. (5,0) e (-5,0).

40. Achar os pontos da hipérbole $x^2-y^2=1$ mais próximos de (0,1). Resp. $(\pm\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{1}{2})$.

41. Um triângulo isóceles está circunscrito a um círculo de raio $R$. Se $x$ é a altura do triângulo, mostre que sua área é mínima quando $x=3R$.

42. Qual é o menor valor da constante $a$ para o qual a desigualdade $ax+\frac{1}{x}\ge 2\sqrt{2}$ é válida para todo número positivo $x$? Resp. $a=2$.

43. Seja $f(x)=5x^2+\frac{a}{x^5}$, $x>0$, onde $a>0$. Ache o menor valor de $a$ de modo que $f(x)\ge 28$, para todo $x>0$. Resp. $a=2^8$.