MAT2453 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I

1o. Semestre de 2008 - 3a. Lista de Exercícios

1. Dentre todos os retângulos de perímetro 8, determine as dimensões do que tem área máxima. Resp. Quadrado de lado 2.

2. Determine o número real positivo cuja soma com seu inverso seja mínima. Resp. 1

3. Determine a altura do cilindro circular reto de volume máximo inscrito numa esfera de raio R dado. Resp. $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

4. Determine a altura do cone circular reto de volume máximo inscrito numa esfera de raio R dado. Resp. $\frac{4R}{3}$.

5. Determine a altura do cone circular reto de volume máximo com geratriz a dada. Resp. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

6. Considere a curva $y = 1 - x^2$, $0 \leq x \leq 1$. Determine a tangente à curva tal que a área do triâgulo que ela forma com os eixos coordenados seja máxima. Resp. Tangente no ponto $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3})$.

7. Deseja-se construir uma caixa d'água, de forma cilíndrica, de 1 m^3 de volume. Na lateral e no fundo será utilizado material que custa R\$10,00 o metro quadrado e na tampa material de R\$20,00 o metro quadrado. Determine as dimensões da caixa que minimiza o custo do material empregado. Resp. raio da base: $\sqrt[3]{\frac{2}{3\pi}}$, altura: $\sqrt[3]{\frac{9}{4\pi}}$.

8. Seja r uma reta que passa pelo ponto $(1, 2)$ e intercepta os eixos coordenados nos pontos $A = (a, 0)$ e $B = (0, b)$, com $a > 0$ e $b > 0$. Determine r para que a distância entre A e B seja a menor possível. Resp. $y - 2 = -\sqrt[3]{2}(x - 1)$.

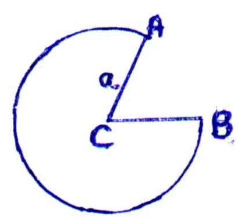
9. Um triângulo isóceles está circunscrito a um círculo de raio R. Se x é a altura do triângulo, mostre que sua área é mínima quando $x = 3R$.

10. Um cilindro é obtido girando-se um retângulo ao redor do eixo x, onde a base do retângulo está apoiada. Seus vértices superiores estão sobre a curva $y = \frac{x}{x^2+1}$. Qual é o maior volume que tal cilindro pode ter? Resp. $\frac{\pi}{4}$.

11. Um arame de comprimento L deve ser cortado em 2 pedaços, um para formar um quadrado e outro um triângulo equilátero. Como se deve cortar o arame para que a soma das áreas cercadas pelos 2 pedaços seja mínima? Resp. o lado do quadrado é $\frac{L\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}$.

12. Determine o cone circular reto de maior volume que pode ser inscrito numa esfera de raio 3. Resp. altura: 4; raio: $2\sqrt{2}$.

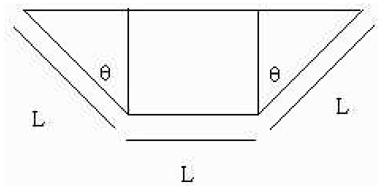
13. Um papel de filtro circular de raio a deve ser transformado em um filtro cônico cortando um setor circular e juntando as arestas CA e CB. Ache a razão entre o raio e a profundidade do filtro de capacidade máxima. Resp. $\sqrt{2}$.



14. Um muro de 2 metros de altura está a 1 metro de distância da parede lateral de um prédio. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apoiam uma na parede, e outra no chão do lado de fora do muro? Resp. $\left(1 + \sqrt[3]{4}\right)^{3/2}$.

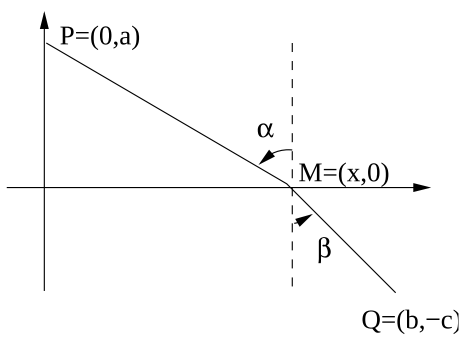
15. Deseja-se construir uma esfera e um cubo de modo que a soma das áreas de suas superfícies seja igual a 2. Determine o raio da esfera que maximiza e o que minimiza a soma de seus volumes. Resp. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$; $\frac{1}{\sqrt{2\pi+12}}$.

16. Um reservatório tem fundo horizontal e seção transversal como se mostra na figura. Achar a inclinação dos lados com a vertical de modo a obter a máxima capacidade. Resp. $\theta = \frac{\pi}{6}$.



17. Um corredor de largura a forma um ângulo reto com um segundo corredor de largura b. Uma barra longa, fina e pesada deve ser empurrada do piso do primeiro corredor para o segundo. Qual o comprimento da maior barra que pode passar a esquina? Resp. $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$.

18. (Lei de Refração de Snellius) O objetivo desta questão é demonstrar como a *lei da refração de Snellius*, da Óptica Geométrica, pode ser obtida como conseqüência do *princípio de Fermat*, segundo o qual "a trajetória dos raios de luz é aquela que minimiza o tempo de percurso". Sejam $P \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano superior e $Q \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano inferior, fixos vide figura abaixo.



Uma partícula vai de P a um ponto $M = (x, 0)$ sobre o eixo Ox com velocidade constante u e movimento retilíneo; em seguida, vai de M até Q com velocidade constante v, também em movimento retilíneo. Seja $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $T(x)$ é o tempo de percurso de P a Q. Mostre que T possui um único ponto de mínimo $x_0 \in \mathbb{R}$. Verifique que $x_0 \in (0, b)$ e que, se $x = x_0$, então

$$\frac{\sin\alpha}{u} = \frac{\sin\beta}{v}.$$

19. Uma folha de papel retangular de 8,5 × 11 poleagadas é colocada em uma superfície plana. Um dos vértices é colocado no lado maior oposto, como mostra a figura, e deixado lá enquanto se dobra e se marca a folha. O problema é tornar o comprimento do vinco o menor possível. Chamamos esse comprimento de L. Experimente fazer isso com papel.

(a) Demonstre que $L^2 = 2x^3/(2x - 8,5)$.

(b) Que valor de x minimiza L^2? Qual é o valor mínimo de L?