

I - Integrais Indefinidas

Calcule as integrais indefinidas abaixo:

- |  |   |  |                                    |
|--|---|--|------------------------------------|
| 1. $\int \frac{x^7 + x^2 + 1}{x^2} dx$                       | 2. $\int e^{2x} dx$                                 | 3. $\int \cos 7x dx$                                       | 4. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ |
| 5. $\int \frac{7}{x-2} dx$                                   | 6. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x dx$         | 7. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$  | 8. $\int \operatorname{tg} x dx$   |
| 9. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$                           | 10. $\int \frac{x}{1+x^2} dx$                       | 11. $\int \frac{x}{1+x^4} dx$                              | 12. $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$    |
| 13. $\int x \sqrt{1-x^2} dx$                                 | 14. $\int \sec x dx$                                | 15. $\int \frac{dx}{x \sqrt{1+\ln x}}$                     |                                    |
| 16. $\int x^2 \sqrt[5]{x^3+1} dx$                            | 17. $\int \frac{4x+8}{2x^2+8x+20} dx$               | 18. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$                       |                                    |
| 19. $\int \frac{dx}{(\operatorname{arcsen} x) \sqrt{1-x^2}}$ | 20. $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$                     | 21. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x} dx$     |                                    |
| 22. $\int e^{x^3} x^2 dx$                                    | 23. $\int e^x \sqrt[3]{1+e^x} dx$                   | 24. $\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ |                                    |
| 25. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$       | 26. $\int 2x(x+1)^{2008} dx$                        | 27. $\int x \operatorname{sen} x dx$                       |                                    |
| 28. $\int e^x \cos x dx$                                     | 29. $\int x^r \ln x dx, r \in \mathbb{R}$           | 30. $\int (\ln x)^2 dx$                                    |                                    |
| 31. $\int x e^{-x} dx$                                       | 32. $\int x \operatorname{arctg} x dx$              | 33. $\int \operatorname{arcsen} x dx$                      |                                    |
| 34. $\int \sec^3 x dx$                                       | 35. $\int \cos^2 x dx$                              | 36. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x dx$              |                                    |
| 37. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx$                | 38. $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$ | 39. $\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$            |                                    |
| 40. $\int \frac{dx}{2x^2+8x+20}$                             | 41. $\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)^2(x-2)} dx$        | 42. $\int \frac{x^5+x+1}{x^3-8} dx$                        |                                    |
| 43. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$                       | 44. $\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx$                      | 45. $\int e^{\sqrt{x}} dx$                                 |                                    |
| 46. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$                          | 47. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$               | 48. $\int \sqrt{x} \ln x dx$                               |                                    |

49.  $\int \operatorname{sen}(\ln x) dx$       50.  $\int \frac{x}{x^2 - 4} dx$       51.  $\int \frac{3x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x - 3} dx$
52.  $\int \sqrt{a^2 + b^2 x^2} dx$       53.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}}$       54.  $\int \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx$
55.  $\int \sqrt{3 - 2x - x^2} dx$       56.  $\int \frac{dx}{(1 + x^2)\sqrt{1 - x^2}}$       57.  $\int \cos^3 x dx$
58.  $\int \operatorname{sen}^5 x dx$       59.  $\int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x} dx$       60.  $\int \operatorname{sen}^3\left(\frac{x}{2}\right) \cos^5\left(\frac{x}{2}\right) dx$
61.  $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x \cos^3 x}$       62.  $\int \operatorname{sen}^4 x dx$       63.  $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x dx$
64.  $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x dx$       65.  $\int \cos^6(3x) dx$       66.  $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^6 x} dx$
67.  $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^4 x}$       68.  $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$       69.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$   
(Sugestão: faça  $u = \sqrt[6]{x}$ )
70.  $\int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)^2} dx$       71.  $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$       72.  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x-x^2}} dx$
73.  $\int \frac{4x^2 - 3x + 3}{(x^2 - 2x + 2)(x+1)} dx$       74.  $\int \frac{dx}{1+e^x}$       75.  $\int \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$
76.  $\int x^5 e^{-x^3} dx$       77.  $\int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)} dx$

78. Determine condições sobre  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  para que as primitivas de

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^2(x-d)^2}$$

sejam funções racionais.

Resp.  $d = c$  ou  $(a+b)(c+d) = 2(ab+cd)$ .

79. Calcule  $\int \frac{x^2}{(\cos x + x \operatorname{sen} x)^2} dx$ . (Sugestão: Calcule a derivada de  $v(x) = \frac{-1}{\cos x + x \operatorname{sen} x}$  e use integração por partes.)  
Resp.  $\frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{\cos x + x \operatorname{sen} x} + C$ .

## II - Aplicações da Integral Definida

1. Calcule  $\int_{-1}^1 x^3 \operatorname{sen}(x^2 + 1) dx$ . Resp. 0.
2. Encontre o volume de uma pirâmide cuja base é o quadrado de lado  $L$  e cuja altura é  $h$ .
3. Calcule o volume do sólido cuja base é a astróide de equação  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  e tal que as seções transversais por planos paralelos ao plano  $Oxz$  são quadrados. Resp.  $\frac{128}{105} a^3$ .

4. Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left( \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right)$ . Resp. 2.

5. Calcule o comprimento do gráfico de  $f(x) = \ln(\cos x)$ , para  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ . Resp.  $\ln(1 + \sqrt{2})$ .

6. Calcule o comprimento da astróide  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ . Resp.  $6a$ .

7. Calcule a área da região interna ao laço formado pela curva  $y^2 = x^2(x + 3)$ . Resp.  $\frac{24}{5}\sqrt{3}$ .

8. Calcule a área da região do plano limitada pela elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Resp.  $\pi ab$ .

9. Determine o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo  $Ox$  do conjunto

a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy \leq 2, x^2 + y^2 \leq 5 \text{ e } x > 0\}$ . Resp.  $\frac{5\sqrt{5}-2}{3}\pi$ .

b)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sqrt{x} \text{ e } (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ . Resp.  $\frac{\pi}{6}$ .

c)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \text{ e } e^{-x} \leq y \leq e^x\}$ . Resp.  $\frac{\pi}{2}(e^2 - e^{-2})^2$ .

d)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \leq 1 \text{ e } 1/x \leq y \leq 4/x^2\}$ . Resp.  $\frac{5\pi}{6}$ .

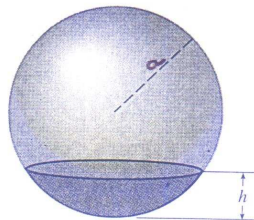
10. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta  $y = 3$  da região delimitada pelas parábolas  $y = x^2$  e  $y = 2 - x^2$ . Resp.  $\frac{32}{3}\pi$ .

11. Seja  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } \ln(x+1) + 2 \leq y \leq e^x + 4\}$ . Determine o volume do sólido obtido pela rotação de  $A$  em torno da reta  $y = 2$ .

(Resp.:  $\pi \left[ \int_0^1 (e^x + 2)^2 dx - \int_0^1 \ln^2(x+1) dx \right] = \dots$ )

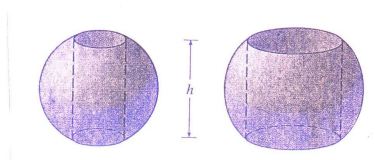
12. O disco  $x^2 + y^2 \leq a^2$  é girado em torno da reta  $x = b$ , com  $b > a$ , para gerar um sólido, com a forma de um pneu. Esse sólido é chamado **toro**. Calcule seu volume. (Sugestão: Note que  $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy = \frac{\pi a^2}{2}$ .) Resp.  $(2\pi b)(\pi a^2)$ .

13. Calcule o volume de uma calota esférica de altura  $h$ ,  $h \leq a$ , de uma esfera de raio  $a$ . Resp.  $\pi h^2(a - \frac{h}{3})$ .



14. Determine o comprimento da curva  $y = \cosh x$ ,  $-3 \leq x \leq 4$ . Resp.  $\sinh 4 + \sinh 3$ .

15. Um anel esférico é o sólido que permanece após a perfuração de um buraco cilíndrico através do centro de uma esfera sólida. Se a esfera tem raio  $R$  e o anel esférico tem altura  $h$ , prove o fato notável de que o volume do anel depende de  $h$ , mas não de  $R$ .



### III - Miscelânea

1. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e periódica de período  $2L$ , isto é,  $f(x + 2L) = f(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Sejam  $n \in \mathbb{Z}$  e  $a \in \mathbb{R}$ . Mostre que

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L} \int_a^{a+2L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

2. Seja  $f$  uma função contínua em um intervalo  $[a, b]$  e sejam  $u(x)$  e  $v(x)$  funções diferenciáveis cujos valores estão em  $[a, b]$ . Prove que

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = f(v(x)) \frac{dv}{dx} - f(u(x)) \frac{du}{dx}.$$

A fórmula acima é conhecida como *Regra de Leibnitz*.

3. Calcule  $g'(x)$  onde

$$(a) g(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} e^{t^2} dt \quad (b) g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sin(t^2) dt$$

4. Calcule  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{x+1} dx$  em termos de  $A = \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2} dx$ . Resp.  $\frac{1}{2}(\frac{1}{\pi+2} + \frac{1}{2} - A)$ .

5. Seja  $f$  uma função contínua em um intervalo  $I$  contendo a origem e seja

$$y = y(x) = \int_0^x \sin(x-t) f(t) dt$$

Prove que  $y'' + y = f(x)$  e  $y(0) = y'(0) = 0$ , para todo  $x \in I$ .

6. Determine o volume da intersecção de dois cilindros, ambos de raio  $R$  e cujos eixos são ortogonais. Resp.  $\frac{16}{3}R^3$ .

7. Seja  $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^3} dt$ . Calcule  $\int_0^2 xF(x) dx$  em termos de  $F(2)$ . Resp.  $2F(2) - \frac{26}{9}$ .

8. Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos(t^2) dt}{\int_0^x e^{-t^2} dt}$ . Resp. 0.

9. Mostre que  $f(x) = \int_0^{1/x} \frac{1}{t^2 + 1} dt + \int_0^x \frac{1}{t^2 + 1} dt$  é constante em  $(0, \infty)$ . Qual o valor dessa constante? Resp.  $\frac{\pi}{2}$ .

10. Mostre que  $\frac{22}{7} - \pi = \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx$ .

11. Seja  $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

(a) Mostre que  $f$  é crescente e ímpar.

(b) Mostre que  $f(x) \leq f(1) + 1 - \frac{1}{x}$ , para todo  $x \geq 1$ . (Sugestão: Integre  $0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leq \frac{1}{t^2}$  de 1 a  $x$ .)

(c) Mostre que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  existe e é um número real positivo.

(d) Esboce o gráfico de  $f(x)$ , localizando seu ponto de inflexão.

12. Seja  $f(x) = \int_0^x e^{\frac{x^2-t^2}{2}} dt$ . Mostre que  $f'(x) - xf(1) = 1$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

13. Seja  $F : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(x) = \int_1^x \sqrt{t^3 - 1} dt$ .

(a) Calcule o comprimento do gráfico de  $F$  entre  $x = 1$  e  $x = 4$ .

(b) Calcule  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x^3) - F(8)}{\operatorname{sen}(x - 2)}$

## RESPOSTAS DAS INTEGRAIS INDEFINIDAS

1)  $\frac{x^6}{6} + x - \frac{1}{x} + k$

3)  $\frac{1}{7} \operatorname{sen} 7x + k$

5)  $7 \ln |x - 2| + k$

7)  $2\sqrt{\cos x} (\frac{1}{5} \cos^2 x - 1) + k$

9)  $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos x| + k$

11)  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + k$

13)  $-\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + k$

15)  $2\sqrt{1 + \ln x} + k$

17)  $\ln(2x^2 + 8x + 20) + k$

19)  $\ln |\operatorname{arcsen} x| + k$

2)  $\frac{e^{2x}}{2} + k$

4)  $\operatorname{tg} x - x + k$

6)  $\frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + k$

8)  $-\ln |\cos x| + k$

10)  $\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + k$

12)  $x - \operatorname{arctg} x + k$

14)  $\ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + k$

16)  $\frac{5}{18} \sqrt[5]{(x^3 + 1)^6} + k$

18)  $\frac{2}{3} \sqrt{(\ln x)^3} + k$

20)  $\ln(1 + e^x) + k$

- 21)  $-\ln(1 + \cos^2 x) + k$
- 22)  $\frac{1}{3}e^{x^3} + k$
- 23)  $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1 + e^x)^4} + k$
- 24)  $-2 \cos \sqrt{x} + k$
- 25)  $e^{\arctg x} + k$
- 26)  $2(x + 1)^{2009}(\frac{x+1}{2010} - \frac{1}{2009}) + k$
- 27)  $-x \cos x + \operatorname{sen} x + k$
- 28)  $\frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + k$
- 29)  $\begin{cases} \frac{x^{r+1}}{r+1} \ln x - \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + k, \text{ se } r \neq -1 \\ \frac{1}{2}(\ln x)^2 + k, \text{ se } r = -1 \end{cases}$
- 30)  $x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + k$
- 31)  $(-x - 1)e^{-x} + k$
- 32)  $\frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctg x + k$
- 33)  $x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2} + k$
- 34)  $\frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + k$
- 35)  $\frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x \cos x) + k$
- 36)  $\frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{sen}^5 x + k$
- 37)  $\frac{1}{8}(x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4x) + k$
- 38)  $\ln |1 + \operatorname{sen} x| + k$
- 39)  $6 \ln |x - 1| - 25 \ln |x - 2| + 22 \ln |x - 3| + k$
- 40)  $\frac{\sqrt{6}}{12} \arctg(\frac{x+2}{\sqrt{6}}) + k$
- 41)  $-22 \ln |x - 1| + \frac{12}{x-1} + 25 \ln |x - 2| + k$
- 42)  $\frac{x^3}{3} + \frac{35}{12} \ln |x - 2| + \frac{61}{24} \ln(1 + (\frac{x+1}{\sqrt{3}})^2) + \frac{\sqrt{3}}{12} \arctg(\frac{x+1}{\sqrt{3}}) + k$
- 43)  $\frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x - \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + k$
- 44)  $\frac{x}{8}(2x^2 - 1)\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{8} \operatorname{arcsen} x + k$
- 45)  $2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + k$
- 46)  $x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} + k$
- 47)  $\ln |\sqrt{5 - 2x + x^2} + x - 1| + k$
- 48)  $\frac{2}{3} x \sqrt{x} (\ln x - \frac{2}{3}) + k$
- 49)  $\frac{x}{2}(\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)) + k$
- 50)  $\frac{1}{2} \ln |x^2 - 4| + k$
- 51)  $2 \ln |x - 1| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 3) + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg(\frac{x+1}{\sqrt{2}}) + k$
- 52)  $x\sqrt{a^2 + b^2x^2} + \frac{a^2}{2b} \ln(\frac{bx}{a} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2x^2}}{a}) + k$
- 53)  $\frac{1}{b} \ln(\frac{bx}{a} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2x^2}}{a}) + k$
- 54)  $\frac{x-1}{2} \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \frac{1}{2} \ln(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}) + k$
- 55)  $\frac{x+1}{2} \sqrt{3 - 2x - x^2} + 2 \operatorname{arcsen}(\frac{x+1}{2}) + k$
- 56)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctg(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}) + k$
- 57)  $\operatorname{sen} x - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x + k$
- 58)  $-\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + k$
- 59)  $\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 x} - 2 \ln |\operatorname{sen} x| + k$
- 60)  $\frac{1}{4} \cos^8(\frac{x}{2}) - \frac{1}{3} \cos^6(\frac{x}{2}) + k$
- 61)  $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + 3 \ln |\operatorname{tg} x| - \frac{3}{2 \operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{4 \operatorname{tg}^4 x} + k$
- 62)  $\frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{32} \operatorname{sen}(4x) + k$
- 63)  $\frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x - \frac{2}{5} \operatorname{sen}^5 x + \frac{1}{7} \operatorname{sen}^7 x + k$
- 64)  $\frac{x}{16} - \frac{1}{64} \operatorname{sen}(4x) + \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3(2x) + k$
- 65)  $\frac{5}{16} x + \frac{1}{12} \operatorname{sen}(6x) + \frac{1}{64} \operatorname{sen}(12x) - \frac{1}{144} \operatorname{sen}^3(6x) + k$
- 66)  $-\frac{1}{3} \operatorname{cotg}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{cotg}^5 x + k$
- 67)  $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - 2 \operatorname{cotg}(2x) + k$
- 68)  $\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2} + k$
- 69)  $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln |\sqrt[6]{x} - 1| + k$
- 70)  $\frac{1}{16} \ln |x| - \frac{1}{16x} - \frac{1}{32} \ln(x^2 + 4) - \frac{3}{64} \arctg \frac{x}{2} + \frac{4-x}{32(x^2+4)} + k$
- 71)  $\frac{-\arctg x}{x} + \ln |x| - \ln \sqrt{1 + x^2} + k$
- 72)  $\frac{3}{2} \operatorname{arcsen}(x - 1) - (\frac{x+3}{2}) \sqrt{2x - x^2} + k$
- 73)  $2 \ln |x + 1| + \ln(x^2 - 2x + 2) + 3 \arctg(x - 1) + k$
- 74)  $x - \ln(1 + e^x) + k$
- 75)  $-\frac{\ln(x+1)}{x} + \ln |x| - \ln(x + 1) + k$
- 76)  $-\frac{1}{3}(x^3 + 1)e^{-x^3} + k$
- 77)  $\frac{1}{4} \ln |x| - \frac{1}{4x} - \frac{1}{8} \ln(x^2 + 4) - \frac{1}{16} \arctg(\frac{x}{2}) + k$