

MAT2453- Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I - POLI

1o. Semestre de 2013 - 3a. Lista de Exercícios

I - Integrais Indefinidas

Calcule as integrais indefinidas abaixo:

1. $\int \frac{x^7 + x^2 + 1}{x^2} dx$
2. $\int e^{2x} dx$
3. $\int \cos 7x dx$
4. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$
5. $\int \frac{7}{x-2} dx$
6. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x dx$
7. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$
8. $\int \operatorname{tg} x dx$
9. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$
10. $\int \frac{x}{1+x^2} dx$
11. $\int \frac{x}{1+x^4} dx$
12. $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$
13. $\int x \sqrt{1-x^2} dx$
14. $\int \sec x dx$
15. $\int \frac{dx}{x \sqrt{1+\ln x}}$
16. $\int x^2 \sqrt[5]{x^3+1} dx$
17. $\int \frac{4x+8}{2x^2+8x+20} dx$
18. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$
19. $\int \frac{dx}{(\arcsen x) \sqrt{1-x^2}}$
20. $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$
21. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x} dx$
22. $\int e^{x^3} x^2 dx$
23. $\int e^x \sqrt[3]{1+e^x} dx$
24. $\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
25. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$
26. $\int 2x(x+1)^{2010} dx$
27. $\int x \operatorname{sen} x dx$
28. $\int e^x \cos x dx$
29. $\int x^r \ln x dx, r \in \mathbb{R}$
30. $\int (\ln x)^2 dx$
31. $\int x e^{-x} dx$
32. $\int x \operatorname{arctg} x dx$
33. $\int \arcsen x dx$
34. $\int \sec^3 x dx$
35. $\int \cos^2 x dx$
36. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x dx$
37. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx$
38. $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$
39. $\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$
40. $\int \frac{dx}{2x^2+8x+20}$
41. $\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)^2(x-2)} dx$
42. $\int \frac{x^5+x+1}{x^3-8} dx$
43. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$
44. $\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx$
45. $\int e^{\sqrt{x}} dx$
46. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$
47. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$
48. $\int \sqrt{x} \ln x dx$
49. $\int \operatorname{sen}(\ln x) dx$
50. $\int \frac{x}{x^2-4} dx$
51. $\int \frac{3x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3} dx$
52. $\int \sqrt{a^2+b^2x^2} dx$
53. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}$
54. $\int \sqrt{x^2-2x+2} dx$
55. $\int \sqrt{3-2x-x^2} dx$
56. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$
57. $\int \cos^3 x dx$
58. $\int \operatorname{sen}^5 x dx$
59. $\int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x} dx$
60. $\int \operatorname{sen}^3\left(\frac{x}{2}\right) \cos^5\left(\frac{x}{2}\right) dx$

$$\begin{array}{lll}
61. \int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x} & 62. \int \sin^4 x \, dx & 63. \int \sin^2 x \cos^5 x \, dx \\
64. \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx & 65. \int \cos^6(3x) \, dx & 66. \int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} \, dx \\
67. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} & 68. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \, dx & 69. \int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} \\
& & \text{(Sugestão: faça } u = \sqrt[6]{x}\text{)} \\
70. \int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)^2} \, dx & 71. \int \frac{\arctg x}{x^2} \, dx & 72. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x-x^2}} \, dx \\
73. \int \frac{4x^2-3x+3}{(x^2-2x+2)(x+1)} \, dx & 74. \int \frac{dx}{1+e^x} & 75. \int \frac{\ln(x+1)}{x^2} \, dx \\
76. \int x^5 e^{-x^3} \, dx & 77. \int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)} \, dx & 78. \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3} \, dx
\end{array}$$

II - Aplicações da Integral Definida

1. Calcule $\int_{-1}^1 x^3 \sin(x^2 + 1) \, dx$.

2. Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de

$$f(x) = x^3 - 2x + 1 \text{ e } g(x) = -x + 1,$$

com $-1 \leq x \leq 1$.

3. Desenhe a região $A = B \cap C \cap D$ e calcule a área de A , onde

$$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq x^2 - 4\}, C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \leq 12 - 3x^2\} \text{ e}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \leq 3x^2 + 12x + 12\}.$$

4. Desenhe a região

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq x^2 - 1, y \leq x + 1 \text{ e } y \geq -x^2 - 3x - 2\}$$

e calcule a sua área.

5. Sejam $f : [-1, 3] \rightarrow \mathbf{R}$ contínua com $f(x) \leq 0$, para todo $x \in [-1, 3]$,

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 3 \text{ e } y \geq f(x)\} \text{ e } B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 3 \text{ e } y \leq x^2 + 3\}$$

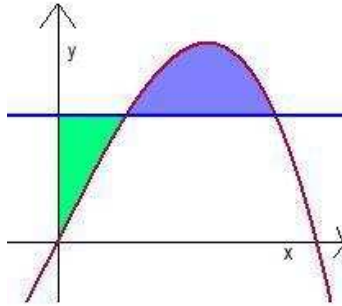
tais que a área de $A \cap B$ seja igual a 23. Calcule $\int_{-1}^3 f(x) \, dx$.

6. Determine $m > 0$ para que a área delimitada por $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ e a reta $y = mx$ seja igual a 4.

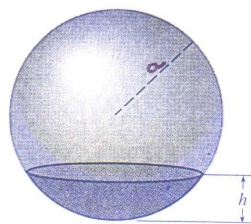
7. Desenhe a região do plano delimitada pela curva $y = x^3 - x$ e por sua reta tangente no ponto de abscissa $x = -1$. Calcule a área desta região.

8. Encontre a área da região limitada entre as curvas $x = y^3 - y$ e $x = 1 - y^4$.

9. A reta horizontal $y = c$ intercepta a curva $y = 2x - 3x^3$ no primeiro quadrante como mostra a figura. Determine c para que as áreas das duas regiões sombreadas sejam iguais.

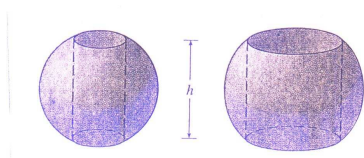


10. Encontre o volume de uma pirâmide cuja base é o quadrado de lado L e cuja altura é h .
11. Calcule o volume do sólido cuja base é a astróide de equação $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ e tal que as seções transversais por planos paralelos ao plano Oxz são quadrados.
12. Calcule o comprimento do gráfico de $f(x) = \ln(\cos x)$, para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.
13. Calcule a área da região interna ao laço formado pela curva $y^2 = x^2(x + 3)$.
14. Calcule a área da região do plano limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
15. Determine o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox do conjunto
- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy \leq 2, x^2 + y^2 \leq 5 \text{ e } x > 0\}$.
 - $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sqrt{x} \text{ e } (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$.
 - $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \text{ e } e^{-x} \leq y \leq e^x\}$.
 - $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \leq 1 \text{ e } 1/x \leq y \leq 4/x^2\}$.
16. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } \ln(x + 1) + 2 \leq y \leq e^x + 4\}$. Determine o volume do sólido obtido pela rotação de A em torno da reta $y = 2$.
17. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $y = 3$ da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$.
18. Calcule o volume de uma calota esférica de altura h , $h \leq a$, de uma esfera de raio a .



19. O disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ é girado em torno da reta $x = b$, com $b > a$, para gerar um sólido, com a forma de um pneu. Esse sólido é chamado **toro**. Calcule seu volume.

20. Seja R a região compreendida entre os gráficos de $f(x) = \frac{18}{9+x^2}$ e $g(x) = \frac{x}{3}$ para $x \in [0, 3]$.
- (a) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo Ox .
- (b) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo Oy .
21. Determine o comprimento da curva $y = \cosh x$, $-3 \leq x \leq 4$.
22. Um anel esférico é o sólido que permanece após a perfuração de um buraco cilíndrico através do centro de uma esfera sólida. Se a esfera tem raio R e o anel esférico tem altura h , prove o fato notável de que o volume do anel depende de h , mas não de R .



III - Aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo

1. Seja f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e sejam $u(x)$ e $v(x)$ funções diferenciáveis cujos valores estão em $[a, b]$. Prove que

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = f(v(x)) \frac{dv}{dx} - f(u(x)) \frac{du}{dx}.$$

A fórmula acima é conhecida como *Regra de Leibnitz*.

2. Calcule $g'(x)$ onde

$$(a) g(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} e^{t^2} dt \quad (b) g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sin(t^2) dt$$

3. Seja $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^3} dt$. Calcule $\int_0^2 xF(x) dx$ em termos de $F(2)$.

4. Seja f uma função contínua em um intervalo I contendo a origem e seja

$$y = y(x) = \int_0^x \sin(x-t)f(t) dt$$

Prove que $y'' + y = f(x)$ e $y(0) = y'(0) = 0$, para todo $x \in I$.

5. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos(t^2) dt}{\int_0^x e^{-t^2} dt}$.

6. Mostre que $f(x) = \int_0^{1/x} \frac{1}{t^2+1} dt + \int_0^x \frac{1}{t^2+1} dt$ é constante em $(0, \infty)$. Qual o valor dessa constante?

7. Seja $f(x) = \int_0^x e^{\frac{x-t^2}{2}} dt$. Mostre que $f'(x) - xf(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

8. Seja $F : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_1^x \sqrt{t^3-1} dt$.

(a) Calcule o comprimento do gráfico de F entre $x = 1$ e $x = 4$.

(b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x^3) - F(8)}{\sin(x-2)}$

IV - Miscelânea

1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e periódica de período $2L$, isto é, $f(x + 2L) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Sejam $n \in \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L} \int_a^{a+2L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

2. Calcule $\int_0^{\pi/2} \frac{\sen x \cos x}{x+1} dx$ em termos de $A = \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2} dx$.

3. **Trabalho.** Quando uma **força constante** de intensidade F é aplicada na direção do movimento de um objeto e esse objeto é deslocado de uma distância d , definimos o **trabalho** W realizado pela força sobre o objeto por $W = F.d$, se a força age no sentido do movimento e por $W = -F.d$, se ela age no sentido oposto. Suponha agora que um objeto está se movendo na direção positiva ao longo do eixo x , sujeito a uma **força variável** $F(x)$. Defina o trabalho W realizado pela força sobre o objeto quando este é deslocado de $x = a$ até $x = b$, e encontre uma fórmula para calculá-lo.

4. **Energia cinética.** Use as notações do exercício anterior, a segunda lei de Newton e a regra da cadeia

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

para mostrar que o trabalho realizado por uma força F atuando sobre uma partícula de massa m que se moveu de x_1 até x_2 é

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2,$$

onde v_1 e v_2 são as velocidades do corpo em x_1 e x_2 . Em Física, a expressão $\frac{1}{2} m v^2$ é chamada de **energia cinética** de um corpo em movimento com velocidade v . Portanto, o trabalho realizado por uma força é igual à variação da energia cinética do corpo e podemos determinar o trabalho calculando esta variação.

5. Suponha que uma partícula se desloca ao longo do eixo $0x$, segundo uma função horária $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ e sob ação de uma força $f(x) \vec{i}$, dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Admita que a dinâmica da partícula é governada por um modelo relativístico: sua massa m depende da sua velocidade v , segundo a função $m : (-c, c) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por (dados $c > 0$ velocidade da luz e $m_0 > 0$ massa de repouso):

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

e sua função horária x satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{d}{dt} (m(x'(t))x'(t)) = f(x(t)).$$

Mostre que, se interpretarmos o trabalho $\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$ realizado pela força f quando a partícula se desloca de $x_0 = x(t_0)$ a $x_1 = x(t_1)$ como variação de energia ΔE , e se $\Delta m = m(x'(t_1)) - m(x'(t_0))$, então:

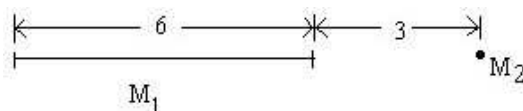
$$\Delta E = \Delta m c^2.$$

Sugestão: Use o teorema de mudança de variáveis na integral de Riemann e o teorema fundamental do cálculo.

6. Sabe-se que a intensidade da força de atração entre duas partículas é dada por

$$F = \frac{Cm_1m_2}{d^2}$$

onde C é uma constante, m_1 e m_2 são as massas das partículas e d é a distância entre elas. Uma barra linear homogênea de massa $M_1 = 18\text{kg}$ e uma massa pontual $M_2 = 2\text{kg}$ estão dispostas como na figura. Calcule a intensidade da força de atração entre as duas massas.



7. Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right)$

8. Determine o volume da intersecção de dois cilindros, ambos de raio R e cujos eixos são ortogonais.

9. Seja $G(x) = \int_0^x \left(t \int_0^t e^{u^2} du \right) dt$. Calcule $G'(x)$ e $G''(x)$.

10. Calcule o comprimento da astróide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

11. Calcule o comprimento do arco da curva $f(x) = -\sqrt{a^2 - x^2} + a \ln\left(\frac{x}{a - \sqrt{a^2 - x^2}}\right)$ no intervalo fechado $[c_0, c_1] \subset]0, a[$ (suponha $a > 0$).

12. Seja $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt, x \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que f é crescente e ímpar.

(b) Mostre que $f(x) \leq f(1) + 1 - \frac{1}{x}, \forall x \geq 1$. (Sugestão: Integre $0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leq \frac{1}{t^2}$ de 1 a x .)

(c) Mostre que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existe e é um número real positivo.

(d) Esboce o gráfico de $f(x)$, localizando seu ponto de inflexão.

13. Estude as seguintes integrais de Riemann impróprias:

(a) $\int_0^1 \ln(x) dx$

(b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

(c) $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$

RESPOSTAS

I - Integrais Indefinidas

1) $\frac{x^6}{6} + x - \frac{1}{x} + k$

3) $\frac{1}{7} \sin 7x + k$

5) $7 \ln|x-2| + k$

7) $2\sqrt{\cos x} \left(\frac{1}{5} \cos^2 x - 1 \right) + k$

9) $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + k$

11) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + k$

13) $-\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + k$

15) $2\sqrt{1+\ln x} + k$

17) $\ln(2x^2 + 8x + 20) + k$

19) $\ln|\operatorname{arcsen} x| + k$

21) $-\ln(1 + \cos^2 x) + k$

2) $\frac{e^{2x}}{2} + k$

4) $\operatorname{tg} x - x + k$

6) $\frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + k$

8) $-\ln|\cos x| + k$

10) $\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + k$

12) $x - \operatorname{arctg} x + k$

14) $\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + k$

16) $\frac{5}{18} \sqrt[5]{(x^3+1)^6} + k$

18) $\frac{2}{3} \sqrt{(\ln x)^3} + k$

20) $\ln(1+e^x) + k$

22) $\frac{1}{3} e^{x^3} + k$

- 23) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+e^x)^4} + k$
 24) $-2\cos\sqrt{x} + k$
 25) $e^{\arctg x} + k$
 26) $2(x+1)^{2011}\left(\frac{x+1}{2012} - \frac{1}{2011}\right) + k$
 27) $-x\cos x + \operatorname{sen} x + k$
 28) $\frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + k$
 29) $\begin{cases} \frac{x^{r+1}}{r+1}\ln x - \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + k, \text{ se } r \neq -1 \\ \frac{1}{2}(\ln x)^2 + k, \text{ se } r = -1 \end{cases}$
 30) $x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + k$
 31) $(-x-1)e^{-x} + k$
 32) $\frac{x^2}{2}\arctg x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctg x + k$
 33) $x\arcsen x + \sqrt{1-x^2} + k$
 34) $\frac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + k$
 35) $\frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x \cos x) + k$
 36) $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + k$
 37) $\frac{1}{8}(x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x) + k$
 38) $\ln|1 + \operatorname{sen} x| + k$
 39) $6\ln|x-1| - 25\ln|x-2| + 22\ln|x-3| + k$
 40) $\frac{\sqrt{6}}{12}\arctg\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right) + k$
 41) $-22\ln|x-1| + \frac{12}{x-1} + 25\ln|x-2| + k$
 42) $\frac{x^3}{3} + \frac{35}{12}\ln|x-2| + \frac{61}{24}\ln\left(1 + \left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right) + \frac{\sqrt{3}}{12}\arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + k$
 43) $\frac{1}{2}\arcsen x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + k$
 44) $\frac{x}{8}(2x^2-1)\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{8}\arcsen x + k$
 45) $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + k$
 46) $x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + k$
 47) $\ln|\sqrt{5-2x+x^2} + x - 1| + k$
 48) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x - \frac{2}{3}) + k$
 49) $\frac{x}{2}(\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)) + k$
 50) $\frac{1}{2}\ln|x^2-4| + k$
 51) $2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + k$
 52) $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+b^2x^2} + \frac{a^2}{2b}\ln(bx + \sqrt{a^2+b^2x^2}) + k$
 53) $\frac{1}{b}\ln\left(\frac{bx}{a} + \frac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a}\right) + k$
 54) $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2} + \frac{1}{2}\ln(x-1 + \sqrt{x^2-2x+2}) + k$
 55) $\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + 2\arcsen\left(\frac{x+1}{2}\right) + k$
 56) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctg\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right) + k$
 57) $\operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + k$
 58) $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + k$
 59) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} - 2\ln|\operatorname{sen} x| + k$
 60) $\frac{1}{4}\cos^8\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{3}\cos^6\left(\frac{x}{2}\right) + k$
 61) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + 3\ln|\operatorname{tg} x| - \frac{3}{2\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{4\operatorname{tg}^4 x} + k$
 62) $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + k$
 63) $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \frac{2}{5}\operatorname{sen}^5 x + \frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x + k$
 64) $\frac{x}{16} - \frac{1}{64}\operatorname{sen}(4x) + \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3(2x) + k$
 65) $\frac{5}{16}x + \frac{1}{12}\operatorname{sen}(6x) + \frac{1}{64}\operatorname{sen}(12x) - \frac{1}{144}\operatorname{sen}^3(6x) + k$
 66) $-\frac{1}{3}\cotg^3 x - \frac{1}{5}\cotg^5 x + k$
 67) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - 2\cotg(2x) + k$
 68) $\arcsen x + \sqrt{1-x^2} + k$
 69) $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x}-1| + k$
 70) $\frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{16x} - \frac{1}{32}\ln(x^2+4) - \frac{3}{64}\arctg\frac{x}{2} + \frac{4-x}{32(x^2+4)} + k$
 71) $\frac{-\arctg x}{x} + \ln|x| - \ln\sqrt{1+x^2} + k$
 72) $\frac{3}{2}\arcsen(x-1) - \left(\frac{x+3}{2}\right)\sqrt{2x-x^2} + k$
 73) $2\ln|x+1| + \ln(x^2-2x+2) + \arctg(x-1) + k$
 74) $x - \ln(1+e^x) + k$
 75) $-\frac{\ln(x+1)}{x} + \ln|x| - \ln(x+1) + k$
 76) $-\frac{1}{3}(x^3+1)e^{-x^3} + k$
 77) $\frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{4x} - \frac{1}{8}\ln(x^2+4) - \frac{1}{8}\arctg\left(\frac{x}{2}\right) + k$
 78) $\frac{1}{6}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{\sqrt{x^2-9}}{2x^2} + k$

II - Aplicações da Integral Definida

- | | | | |
|---------------------|------------------------------|---|---|
| 1. 0. | 7. $\frac{27}{4}$ | 14. πab . | 17. $\frac{32}{3}\pi$. |
| 2. $\frac{1}{2}$ | 8. $\frac{8}{5}$ | 15. (a) $\frac{10\sqrt{5}-2}{3}\pi$. | 19. $(2\pi b)(\pi a^2)$. |
| 3. $\frac{104}{3}$ | 9. $c = \frac{4}{9}$ | (b) $\frac{\pi}{6}$. | 20. $\pi h^2(a - \frac{h}{3})$. |
| 4. $\frac{107}{24}$ | 11. $\frac{128}{105}a^3$. | (c) $\frac{\pi}{2}(e^2 - e^{-2})^2$. | 21. $\operatorname{senh}4 + \operatorname{senh}3$. |
| 5. $-\frac{5}{3}$ | 12. $\ln(1 + \sqrt{2})$. | (d) $\frac{5\pi}{6}$. | |
| 6. $m = 2$ | 13. $\frac{24}{5}\sqrt{3}$. | 16. $\pi \left[\int_0^1 (e^x + 2)^2 dx - \int_0^1 \ln^2(x+1) dx \right]$ | |

III - Aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo

3. $2F(2) - \frac{26}{9}$. 5. 0. 6. $\frac{\pi}{2}$.

IV - Miscelânea

2. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi+2} + \frac{1}{2} - A\right)$. 9. $G'(x) = x \int_0^x e^{u^2} du$,
 $G''(x) = \int_0^x e^{u^2} du + xe^{x^2}$. 11. $a \ln\left(\frac{c_1}{c_0}\right)$.
6. $\frac{4}{3}C$ 10. $6a$. 13. (a) -1 (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) 1
8. $\frac{16}{3}R^3$.