MAT2453 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I

1º Semestre de 2014 - 1ª Lista de Exercícios

I. Limites de Funções

1. Calcule os seguintes limites, caso existam:

1. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^3+9x^2+12x+4}{-x^3-2x^2+4x+8}$ 2. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x^2+16}-5}{x^2+3x}$ 3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+12}-4}{2-\sqrt{x^3-4}}$

4. $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{\sqrt[4]{2x}-1}{\sqrt{2x-1}}$ 5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^4+1}-1}{x^4}$ 6. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(20x)}{\operatorname{sen}(301x)}$ 8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2x))}{x}$ 9. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg}(3x)\ \operatorname{cossec}(6x))$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$ 11. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ 12. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$

13. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(3x^2-5x+2)}{x^2+x-2}$ 14. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3-x^2}$ 15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^3(x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^4+x^2}}{x}$ 17. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ 18. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\operatorname{sen}(x^3-1)\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\sqrt{x-1}}$

19. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$ 20. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ 21. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$

22. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{9x+1}}$ 23. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$ 24. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^4+1}\right)$

25. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^5+2x-8}{\sqrt{x^6+x+1}}$ 26. $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+9}+x+3)$ 27. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-2x)\operatorname{sen}(x^2-4)}{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{4x}}$

28. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^3+x\cos(\sqrt{x})}{x^4\operatorname{sen}(1/x)+1}$ 29. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}(\operatorname{sen} x+\sqrt{x}\cos x)}{x\sqrt{x}-\operatorname{sen}(x\sqrt{x})}$ 30. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt[4]{7x^{12}+5x^4+7}}{2x^3+2}$

31. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})$ 32. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^3+x^2-5x+3}}{x^2-1}$ 33. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}\cos x+2x^2\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{x-\sqrt{1+x^2}}$

Resp.: 1) $-3/4$; 2) $1/5$; 3) $-1/6$; 4) 0; 5) $1/3$; 6) $\sqrt{2}$; 7) $\frac{20}{301}$; 8) 2; 9) $1/2$; 10) $1/6$; 11) -1; 12) -1; 13) $1/3$; 14) $-\infty$; 15) 0; 16) $\nexists$; 17) $\nexists$; 18) 0; 19) $-\infty$; 20) $+\infty$; 21) 0; 22) $1/3$; 23) 1; 24) $-\infty$; 25) $-\infty$; 26) 3; 27) $32\sqrt{2}$; 28) 3; 29) 0; 30) $-\sqrt[4]{7}/2$; 31) $1/2$; 32) $\nexists$; 33) $-\infty$.

2. A resolução abaixo está incorreta. Assinale o erro e calcule (corretamente) o limite:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\underbrace{\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}-1\right)}_{\to 0} = \lim_{x\to+\infty}(x\cdot 0) = 0.$$

3. Sejam $c, L\in\mathbb{R}$ tais que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+cx+c}{x^2-1} = L$. Determine c e L. Resp.: $c=-1$; $L=5/2$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   (a) Assumindo que $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1$, calcule $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{x}$. Resp.: 2.

   (b) Assumindo que $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, calcule $\lim_{x\to 0} f(x)$. Resp.: 0.

   (c) Assumindo que $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^2+x} = +\infty$, calcule $\lim_{x\to +\infty} f(x)$. Resp.: $+\infty$.

5. Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

   (a) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções tais que f é limitada, f é positiva e $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que $\lim_{x\to +\infty} (\ f(x)g(x)\ ) = +\infty$. Resp.: Falsa.

   (b) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções tais que f é limitada e $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que $\lim_{x\to +\infty} \big(f(x) + g(x)\big) = +\infty$. Resp.: Verdadeira.

   (c) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções tais que $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, então $\lim_{x\to +\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = +\infty$. Resp.: Falsa.

6. Dê exemplos de funções f e g tais que:

   (a) $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

   (b) $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0} \big(f(x) - g(x)\big) = 1$.

   (c) $\lim_{x\to 0} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$ e $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 1$.

   (d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ e $\lim_{x\to 0} \big(f(x) - g(x)\big) \neq 0$.

7. Mostre que se $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ e se g é limitada então $\lim_{x\to a} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$.

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\big|f(x)\big| \leq 2|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x^3)}{x}$. Resp.: 0.

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $1 + x^2 + \dfrac{x^6}{3} \leq f(x) + 1 \leq \sec x^2 + \dfrac{x^6}{3}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim_{x\to 0} f(x)$ e $\lim_{x\to 0} \left(f(x) \cos\left(\dfrac{1}{x+x^2}\right)\right)$. Resp.: 0; 0.

10. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $|\operatorname{sen} x| \leq f(x) \leq 3|x|$ e $0 \leq g(x) \leq 1 + |\operatorname{sen} x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim_{x\to 0} (\ f(x)\, g(x) + \cos\ x\ )$ Resp.: 1.

11. Sejam C o círculo de raio 1 e centro em $(1, 0)$, C_r o círculo de raio r (onde $0 < r < 2$) e centro em $(0, 0)$, P_r o ponto $(0, r)$ e Q_r o ponto, situado no primeiro quadrante, intersecção dos círculos C e C_r. Se L_r é a interseção da reta P_rQ_r com o eixo Ox, o que acontecerá com L_r quando C_r encolher, isto é, quando $r \to 0^+$? Resp.: aproximar-se-á do ponto $(4, 0)$.

II. Continuidade de Funções

1. Determine o conjunto dos pontos de seu domínio em que a função f é contínua. Justifique.

(a) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x^2-4)+5, & \text{se } x > 2 \\ \dfrac{x^2+x-6}{x-2}, & \text{se } x < 2 \\ 5, & \text{se } x = 2 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2-4x+3|}{x-3}, & \text{se } x \neq 3 \\ 1, & \text{se } x = 3 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}, & \text{se } x \neq 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \end{cases}$ (d) $f(x) = \dfrac{1+(-1)^{[x]}}{2}\operatorname{sen}(\pi x)$.

Obs.: o símbolo $[x]$ denota o maior número inteiro que é menor ou igual a x e é definido por $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$.

Resp.: a) $\mathbb{R}$; b) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; c) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; d) $\mathbb{R}$.

2. Determine L para que a função dada seja contínua em $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+2)-\operatorname{sen}(x+2)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ L, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^8+x^4}}{x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ L, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Resp.: (a) $-\cos 2$; (b) 1 .

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{(x-1)^6}}{x-1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Verifique que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. Pergunta-se: f é contínua no ponto $x = 1$? Por quê? Resp. Não.

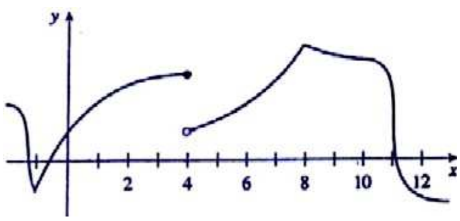
4. Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

(a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $|f|$ é contínua em $x = 0$, então f é contínua em $x = 0$. Resp.: Falsa.

(b) Se f e g são funções descontínuas em $x = 0$, então a função fg é descontínua em $x = 0$. Resp.: Falsa.

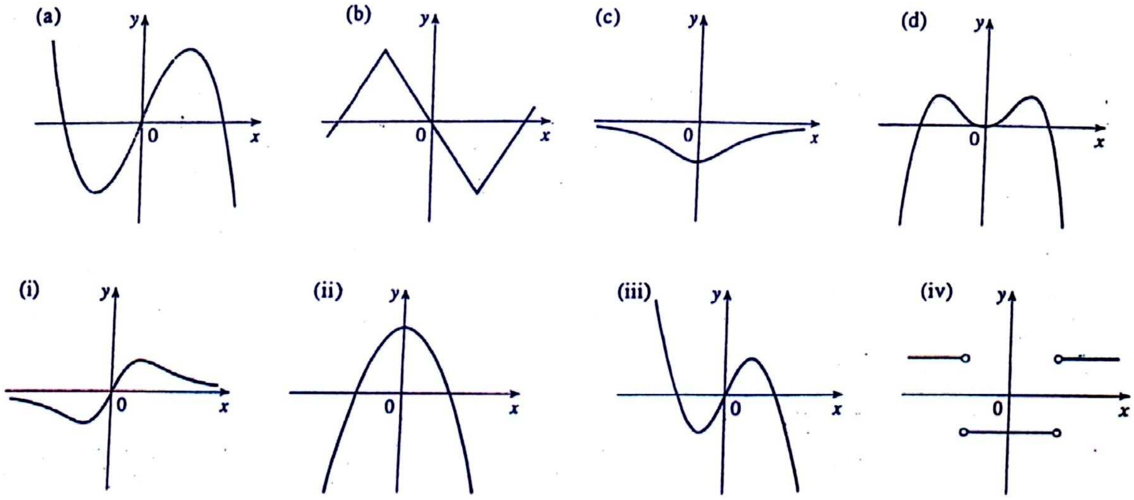
III. Derivadas

1. Considere o gráfico de f dado abaixo. Estabeleça, justificando, os pontos onde f não é derivável.



Resp.: -1 ; 4 ; 8 ; 11 .

2. Associe cada um dos gráficos de função, de (a) a (d), com os gráficos de suas respectivas derivadas, de (i) a (iv).



Resp.: (a) e (ii) ; (b) e (iv) ; (c) e (i) ; (d) e (iii) .

3. Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto $\mathbf{I}$, $a \in \mathbf{I}$ e $h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \geq a \\ g(x), & \text{se } x < a \end{cases}$

   Prove que h é derivável em $x = a$ se, e somente se, $f(a) = g(a)$ e $f'(a) = g'(a)$.

4. Encontre constantes a, b e c tais que a função $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 5x + 6, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

   seja derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(0) = 0$. Resp.: $a = -3/2$, $b = 0$; $c = 7/2$.

5. Verifique se f é contínua e derivável no ponto x_0, sendo:

   (a) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)\cos\dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$

   (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x}{\sqrt{x-1}}, & \text{se } x > 1 \\ 1, & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$ $\quad x_0 = 1$

   (c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + \operatorname{sen} x, & \text{se } x > 0 \\ x^5 + 4x^3, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$

   (d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{5}x^5, & \text{se } x > 1 \\ x^4, & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$ $\quad x_0 = 1$

   (e) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$

   (f) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$

   (g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$ (obs: $\cos x < \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$, para todo $x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$)

   (h) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{x^2 + x^4}}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$

   (i) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$, $x_0 = 0$ j) $f(x) = |\operatorname{sen}(x^5)|$, $x_0 = 0$ k) $f(x) = \cos(\sqrt{|x|})$, $x_0 = 0$

   Resp.: são contínuas em x_0: (a), (c), (e), (f), (g), (h), (i), (j), (k) ; são deriváveis em x_0: (f), (g), (j).

6. Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}[(3+x)^2] - \operatorname{tg} 9}{x}$. Resp: $6\sec^2 9$.

7. Calcule $f'(x)$ para as funções f abaixo:

1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ 2) $f(x)=\dfrac{(2x^3+1)^{32}}{x+2}$ 3) $f(x)=\dfrac{4x-x^4}{(x^3+2)^{100}}$

4) $f(x)=x\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{x^5}-x^2\right)$ 5) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}\cos x}{(x^4+\mathrm{tg}^2\,x+1)^2}$ 6) $f(x)=\sqrt[6]{x\ \mathrm{tg}^2\,x}$

7) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+\mathrm{cossec}\,x}{x^3+3x^2}$ 8) $f(x)=\sec\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ 9) $f(x)=\dfrac{x^2\,\mathrm{tg}(x^3-x^2)}{\sec x}$

10) $f(x)=x\,\mathrm{sen}\,x\cos x$ 11) $f(x)=\dfrac{(x+\lambda)^4}{x^4+\lambda^4}$ 12) $f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{sen}(x-\mathrm{sen}\,x)}$

13) $f(x)=\dfrac{2x}{\left(x+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3}}}$ 14) $f(x)=\mathrm{cotg}(3x^2+5)$ 15) $f(x)=\dfrac{x^2}{\mathrm{sen}^{33}\,x\cos^{17}x}$

16) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}\,\mathrm{sen}\,x}{x^2\cos(x^2)}$

8. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}$ tal que $|f(x)|\le|x^3+x^2|$, para todo $x\in\mathbb{R}$. A função f é derivável em 0? Resp.: Sim.

9. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivável em $a\in\,]0,+\infty[$. Calcule, em termos de $f'(a)$, o limite: $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$.
Resp.: $2\sqrt{a}\,f'(a)$.

10. Discuta as seguintes "soluções" para a questão "Considere a função $f(x)=x|x|$. Decida se f é derivável em $x=0$ e, em caso afirmativo, calcule $f'(0)$. Justifique suas afirmações."

"solução" 1. $f'(0)=0$, pois $f(0)=0$.

"solução" 2. Como a função $g(x)=|x|$ não é derivável em $x=0$, não é possível usar a regra do produto para derivar f em $x=0$. Logo f não é derivável em $x=0$.

"solução" 3. Temos $f(x)=h(x)g(x)$, onde $h(x)=x$ e $g(x)=|x|$. Assim:

$$f'(0)=h'(0)g(0)+h(0)g'(0);$$

como $g(0)=0$ e $h(0)=0$ então $f'(0)=0$.

"solução" 4. Temos $f(x)=\begin{cases}-x^2, & \text{se } x<0\\ x^2, & \text{se } x\ge 0\end{cases}$ Logo $\lim_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\dfrac{x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}x=0$ e $\lim_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\dfrac{-x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to0^-}-x=0$. Portanto $\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$, ou seja $f'(0)=0$.

Resp.: somente a solução 4 está correta.

11. Em que pontos f é derivável?

a) $f(x)=\sqrt{x^4+x^6}$ b) $f(x)=\sqrt{x^2+x^4}$. Resp.: a) em todos os pontos, b) em $x_0\neq0$.

12. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivável em $x=0$ tal que $f(0)=f'(0)=0$. Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função limitada e não derivável em $x=0$. Calcule a derivada de $h(x)=f(x)\,g(x)$ no ponto $x=0$. Resp.: 0.

13. Seja $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2}\,\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x})$.

(a) Calcule $f'(3)$. Resp.: $\frac{7}{3\sqrt[3]{12}}\mathrm{sen}(\sqrt[3]{3})+\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\cos(\sqrt[3]{3})$.

(b) Calcule $f'(0)$. Resp.: -1.

(c) Seja $g(x)=\dfrac{(5+f(x))(2x+3\sec x)}{x+\mathrm{tg}\,x+4}$, onde f é a função dada acima. Calcule $g'(0)$. Resp.: $-\frac{1}{8}$.

14. Mostrar que a reta $y = -x$ é tangente à curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Encontre o ponto de tangência. Resp: $(3, -3)$.

15. Determine todos os pontos (x_0, y_0) sobre a curva $y = 4x^4 - 8x^2 + 16x + 7$ tais que a tangente à curva em (x_0, y_0) seja paralela à reta $16x - y + 5 = 0$. Resp: $(-1, -13)$, $y = 16x + 3$; $(0, 7)$, $y = 16x + 7$; $(1, 19)$, $y = 16x + 3$.

16. Seja $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$. Determine todas as retas tangentes ao gráfico de f que passam pelo ponto $(0, 0)$. Resp.: $y = -9x$; $y = -x$

17. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável até 2ª ordem e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = xf(x + 1 + \operatorname{sen} 2x)$. Calcule $g''(x)$. Supondo $f'(1) = -2$, calcule $g''(0)$. Resp.: -12.

18. Seja $f(x) = |x^3|$. Calcule $f''(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. A função f'' é derivável no ponto $x_0 = 0$? Justifique. Resp.: Não.

19. Sabe-se que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável em $\mathbb{R}$ e que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 3 é $x + 2y = 6$. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = (f(\sqrt{9 + 4x}\,))^2$. Determine $g'(0)$. Resp.: -1.

20. Mostre que qualquer par de retas tangentes à parábola $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ tem como intersecção um ponto que está numa reta vertical que passa pelo ponto médio do segmento que une os pontos de tangência destas retas.

21. Seja $y = f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x^2 = y^3(2 - y)$. Admitindo f derivável, determine a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$. Resp.: $y = x$.

22. Seja $y = f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x^2 + xy + y^2 = 3$. Admitindo f derivável, determine as possíveis retas tangentes ao gráfico de f que são normais à reta $x - y + 1 = 0$. Resp.: $y + x = 2$; $y + x = -2$.

23. Seja f derivável num intervalo aberto I contendo $x = -1$ e tal que

$$(f(x))^3 - (f(x))^2 + xf(x) = 2,$$

para todo $x \in I$. Encontre $f(-1)$ e a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(-1, f(-1))$. Resp.: 2; $2x + 7y - 12 = 0$.

IV. Taxas Relacionadas

1. (*Expansão Adiabática*) Quando certo gás composto sofre uma expansão adiabática, a sua pressão p e seu volume V satisfazem à equação $p\,V^{1,3} = k$, onde k é uma constante. Mostre que $-V\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = 1{,}3\,p\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$.

2. De um petroleiro quebrado vaza um grande volume V de óleo num mar calmo. Após a turbulência inicial ter acabado, o petróleo se expande num contorno circular de raio r e espessura uniforme h, onde r cresce e h de cresce de um modo determinado pela viscosidade e flutuabilidade do óleo. Experiências de laboratório sugerem que a espessura é inversamente proporcional à raiz quadrada do tempo decorrido: $h = \dfrac{c}{\sqrt{t}}$. Mostre que a taxa $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ com que o petróleo se expande é inversamente proporcional a $t^{3/4}$.

3. Num certo instante t_0, a altura de um triângulo cresce à razão de 1 cm/min e sua área aumenta à razão de 2 cm^2/min. No instante t_0, sabendo que sua altura é 10 cm e sua área é 100 cm^2, qual a taxa de variação da base do triângulo? Resp.: $-1,6$ cm/min.

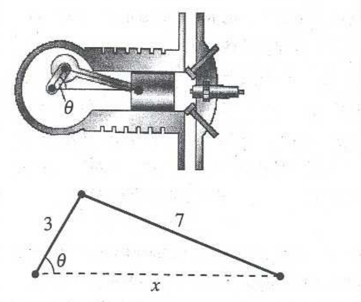
4. Despeja-se areia sobre o chão fazendo um monte que tem, a cada instante, a forma de um cone com diâmetro da base igual a três vezes a altura. Quando a altura do monte é de $1,2$ m, a taxa de variação com que a areia é despejada é de $0,081$m^3/min. Qual a taxa de variação da altura do monte neste instante? Resp.: $\dfrac{1}{40\pi}$ m/min.

5. A aresta de um cubo cresce ao longo do tempo. Num certo instante t_0, o seu volume cresce a uma taxa de 10cm^3/min. Sabendo que, neste instante, a aresta do cubo mede 30cm, qual é a taxa de variação da área da superfície do cubo? Resp.: $\dfrac{4}{3}$ cm^2/min.

6. Uma lâmpada está no solo a 15m de um edifício. Um homem de $1,8$m de altura anda a partir da luz em direção ao edifício a $1,2$m/s. Determine a velocidade com que o comprimento de sua sombra sobre o edifício diminui quando ele está a 12m do edifício e quando ele está a 9m do edifício.
Resp.: $3,6$m/s; $0,9$m/s.

7. Uma tina de água tem 10 m de comprimento e uma seção transversal com a forma de um trapézio isósceles com 30 cm de comprimento na base, 80cm de extensão no topo e 50 cm de altura. Se a tina for preenchida com água a uma taxa de $0,2$ m^3/min, quão rápido estará subindo o nível da água quando ela estiver a 30 cm de profundidade? Resp.: $\frac{10}{3}$ cm/min.

8. No motor mostrado na figura, um bastão de 7 polegadas tem uma de suas extremidades acoplada a uma manivela cujo raio é de 3 polegadas. Na outra extremidade do bastão está um pistão que se desloca quando a manivela gira. Sabendo que a manivela gira no sentido anti-horário a uma taxa constante de 200 rotações por minuto, calcule a velocidade do pistão quando $\theta = \pi/3$.



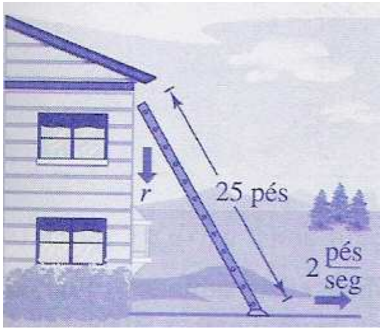
A velocidade de um pistão é relacionada ao ângulo da manivela.

Resp.: $\dfrac{-9600\pi\sqrt{3}}{13}$ polegadas por minuto.

9. Uma câmera de televisão está posicionada a 4.000 pés de uma base de lançamento do foguete. O ângulo de elevação da câmera deve variar a uma taxa que possa focalizar o foguete. O mecanismo de foco da câmera também deve levar em conta o aumento da distância entre a câmera e o foguete. Vamos supor que o foguete suba verticalmente e com uma velocidade de 600 pés/s quando já tiver subido 3.000 pés. Quão rápido está variando a distância da câmera ao foguete nesse momento? Se a câmera de televisão apontar sempre na direção ao foguete, quão rápido estará variando o ângulo de elevação dela nesse mesmo momento? Resp.: 360 pés/s; $0,096$ rad/s.

10. (*Escada deslizante*) Uma escada de 25 pés está encostada na parede de uma casa e sua base está sendo empurrada no sentido contrário ao da parede (veja figura). Num certo instante, a base da escada se

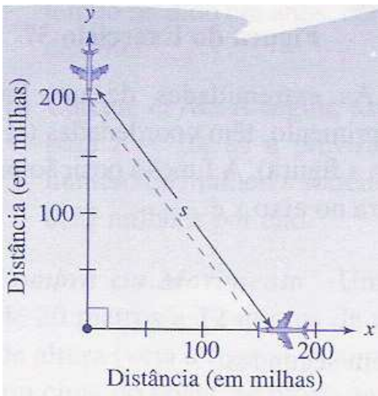
encontra a 7 pés da parede e está sendo empurrada a uma taxa de 2 pés por segundo.



(a) Qual a velocidade com a qual o topo da escada se move para baixo nesse instante?
(b) Considere o triângulo formado pela parede da casa, a escada e o chão. Calcule a taxa de variação da área deste triângulo no instante em que a base da escada se encontra a 7 pés da parede.
(c) Calcule a taxa de variação do ângulo formado pela parede da casa e a escada, quando a base da escada estiver a 7 pés da parede.

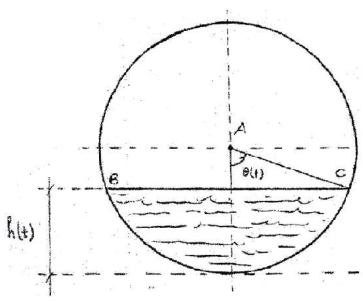
Resp.: (a) $\frac{7}{12}$pes/s; (b) $\frac{527}{24}$pes^2/s; (c) $\frac{1}{12}$rad/s.

11. (*Controle de Tráfego Aéreo*) Um controlador de tráfego aéreo percebe que dois aviões, que estão voando na mesma altitude e ao longo de duas retas perpendiculares entre si, irão se chocar no ponto de intersecção destas retas (veja figura).



Num certo instante um dos aviões está a 150 milhas desse ponto e está se deslocando a uma velocidade de 450 milhas por hora. O outro avião está a 200 milhas do ponto e tem uma velocidade de 600 milhas por hora. A que taxa a distância entre os aviões está diminuindo nesse instante? Resp: 750 mph.

12. Uma mangueira está enchendo um tanque de gasolina que tem o formato de um cilindro deitado de diâmetro 2m e comprimento 3m. A figura abaixo representa a seção transversal do tanque no instante t; o ângulo θ varia de zero (tanque vazio) a π (tanque cheio).



No instante em que a altura h do líquido é de $0,5$ m, a vazão é de $0,9\text{m}^3/\text{min}$. Determine a taxa de variação do ângulo θ no instante em que a altura do líquido é de $0,5$m. Determine a taxa de variação da altura h do líquido neste mesmo instante. Resp.: $0,2\text{rad/min}$; $\frac{\sqrt{3}}{10}\text{m/min}$.

13. Num filtro com formato de cone, como na figura, um líquido escoa da parte superior para a parte inferior passando por um orifício de dimensões desprezíveis. Num certo instante, a altura H do líquido depositado na parte inferior é 8 cm, a altura h do líquido da parte superior é 10 cm e h está diminuindo a uma taxa de variação instantânea de 2 cm por minuto. Calcule a taxa de variação de H em relação ao tempo nesse instante. Resp: $\frac{50}{121}$cm/min.

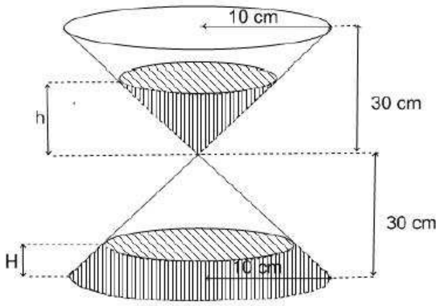


Figura 1

V. Mais algumas derivadas

1. Suponha que f seja uma função injetora, derivável, e que sua inversa f^{-1} seja também derivável. Use derivação implícita para mostrar que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

desde que o denominador não seja nulo.

2. Usando o exercício anterior, encontre $(f^{-1})'(5)$ sabendo que $f(4) = 5$ e que $f'(4) = \frac{2}{3}$.

3. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

(a) $f(x) = \cos(\text{arctg}\, x)$ (b) $f(x) = x^2 \,\text{arctg}\, x$ (c) $f(x) = \text{arcsen}(x^2)$

(d) $f(x) = (1 + \text{arctg}\, x^2)^3$ (e) $f(x) = \dfrac{\text{tg}\,(3x)}{\text{arctg}(3x)}$ (f) $f(x) = \text{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$

(g) $f(x) = \sqrt{1-x^2}\,\text{arcsen}\, x$ (h) $f(x) = x\,\text{arctg}(x^2 - x)$ (i) $f(x) = \arccos x$