MAT2453- Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I - POLI

1o. Semestre de 2014 - 3a. Lista de Exercícios

I - Integrais Indefinidas

Calcule as integrais indefinidas abaixo:

1. $\displaystyle\int \frac{x^7+x^2+1}{x^2}\,dx$
2. $\displaystyle\int e^{2x}\,dx$
3. $\displaystyle\int \cos 7x\,dx$
4. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$
5. $\displaystyle\int \frac{7}{x-2}\,dx$
6. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\,\sec^2 x\,dx$
7. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$
8. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$
9. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$
10. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$
11. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$
12. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$
13. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$
14. $\displaystyle\int \sec x\,dx$
15. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$
16. $\displaystyle\int x^2\sqrt[5]{x^3+1}\,dx$
17. $\displaystyle\int \frac{4x+8}{2x^2+8x+20}\,dx$
18. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$
19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\operatorname{arcsen} x)\sqrt{1-x^2}}$
20. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$
21. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$
22. $\displaystyle\int e^{x^3}x^2\,dx$
23. $\displaystyle\int e^x\sqrt[3]{1+e^x}\,dx$
24. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$
25. $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$
26. $\displaystyle\int 2x(x+1)^{2014}\,dx$
27. $\displaystyle\int x\,\operatorname{sen} x\,dx$
28. $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx$
29. $\displaystyle\int x^r\ln x\,dx,\ r\in\mathbb{R}$
30. $\displaystyle\int (\ln x)^2\,dx$
31. $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx$
32. $\displaystyle\int x\operatorname{arctg} x\,dx$
33. $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\,dx$
34. $\displaystyle\int \sec^3 x\,dx$
35. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$
36. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x\,dx$
37. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\,dx$
38. $\displaystyle\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$
39. $\displaystyle\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$
40. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+8x+20}$
41. $\displaystyle\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)^2(x-2)}\,dx$
42. $\displaystyle\int \frac{x^5+x+1}{x^3-8}\,dx$
43. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
44. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$
45. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$
46. $\displaystyle\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$
47. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$
48. $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln x\,dx$
49. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$
50. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4}\,dx$
51. $\displaystyle\int \frac{3x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3}\,dx$
52. $\displaystyle\int \sqrt{a^2+b^2x^2}\,dx$
53. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}$
54. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x+2}\,dx$
55. $\displaystyle\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$
56. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$
57. $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$
58. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$
59. $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx$
60. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3\left(\frac{x}{2}\right)\cos^5\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$

61. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x \cos^3 x}$

62. $\int \operatorname{sen}^4 x \, dx$

63. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x \, dx$

64. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx$

65. $\int \cos^6(3x) \, dx$

66. $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^6 x} \, dx$

67. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^4 x}$

68. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \, dx$

69. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$
(Sugestão: faça $u = \sqrt[6]{x}$)

70. $\int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)^2} \, dx$

71. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} \, dx$

72. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x - x^2}} \, dx$

73. $\int \frac{4x^2 - 3x + 3}{(x^2 - 2x + 2)(x+1)} \, dx$

74. $\int \frac{dx}{1 + \mathrm{e}^x}$

75. $\int \frac{\ln(x+1)}{x^2} \, dx$

76. $\int x^5 \mathrm{e}^{-x^3} dx$

77. $\int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)} \, dx$

78. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3} dx$

II - Aplicações da Integral Definida

1. Calcule $\int_{-1}^{1} x^3 \operatorname{sen}(x^2+1) \, dx$.

2. Encontre o volume de uma pirâmide cuja base é o quadrado de lado L e cuja altura é h.

3. Calcule o volume do sólido cuja base é a astróide de equação $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ e tal que as seções transversais por planos paralelos ao plano Oxz são quadrados.

4. Calcule o comprimento do gráfico de $f(x) = \ln(\cos x)$, para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

5. Calcule a área da região interna ao laço formado pela curva $y^2 = x^2(x+3)$.

6. Calcule a área da região do plano limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

7. Determine o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox do conjunto

   a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy \leq 2,\ x^2 + y^2 \leq 5 \text{ e } x > 0\}$.

   b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sqrt{x} \text{ e } (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

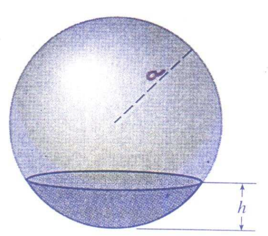
   c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \text{ e } \mathrm{e}^{-x} \leq y \leq \mathrm{e}^x\}$.

   d) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y \leq 1 \text{ e } 1/x \leq y \leq 4/x^2\}$.

8. Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } \ln(x+1) + 2 \leq y \leq \mathrm{e}^x + 4\}$. Determine o volume do sólido obtido pela rotação de A em torno da reta $y = 2$.

9. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $y = 3$ da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$.

10. Calcule o volume de uma calota esférica de altura h, $h \leq a$, de uma esfera de raio a.



11. O disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ é girado em torno da reta $x = b$, com $b > a$, para gerar um sólido, com a forma de um pneu. Esse sólido é chamado **toro**. Calcule seu volume.

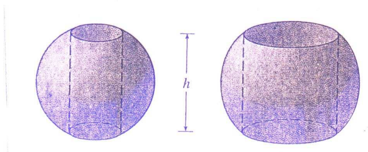
12. Seja R a região compreendida entre os gráficos de $f(x) = \dfrac{18}{9 + x^2}$ e $g(x) = \dfrac{x}{3}$ para $x \in [0, 3]$.

    (a) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo Ox.

    (b) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo Oy.

13. Determine o comprimento da curva $y = \cosh x$, $-3 \leq x \leq 4$.

14. Um anel esférico é o sólido que permanece após a perfuração de um buraco cilíndrico através do centro de uma esfera sólida. Se a esfera tem raio R e o anel esférico tem altura h, prove o fato notável de que o volume do anel depende de h, mas não de R.



III - Aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo

1. Seja f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e sejam $u(x)$ e $v(x)$ funções diferenciáveis cujos valores estão em $[a, b]$. Prove que

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt = f(v(x)) \frac{dv}{dx} - f(u(x)) \frac{du}{dx}.$$

   A fórmula acima é conhecida como *Regra de Leibnitz*.

2. Calcule $g'(x)$ onde

   (a) $g(x) = \displaystyle\int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} e^{t^2} dt$ (b) $g(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}(t^2) dt$

3. Seja $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1 + t^3}\, dt$. Calcule $\displaystyle\int_0^2 xF(x)dx$ em termos de $F(2)$.

4. Seja f uma função contínua em um intervalo I contendo a origem e seja

$$y = y(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(x - t) f(t)\, dt$$

   Prove que $y'' + y = f(x)$ e $y(0) = y'(0) = 0$, para todo $x \in I$.

5. Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{x^2} \cos(t^2)\, dt}{\int_0^x e^{-t^2}\, dt}$.

6. Mostre que $f(x) = \displaystyle\int_0^{1/x} \frac{1}{t^2+1}\, dt + \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\, dt$ é constante em $(0, \infty)$. Qual o valor dessa constante?

7. Seja $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\frac{x^2-t^2}{2}}\, dt$. Mostre que $f'(x) - xf(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

8. Seja $F : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \displaystyle\int_1^x \sqrt{t^3 - 1}dt$.

   (a) Calcule o comprimento do gráfico de F entre $x = 1$ e $x = 4$.

   (b) Calcule $\lim_{x\to 2} \dfrac{F(x^3) - F(8)}{\operatorname{sen}(x-2)}$

IV - Polinômio de Taylor

1. Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado e avalie o erro:

   (a) $\sqrt[3]{8,2}$ (b) $\ln(1,3)$ (c) sen $(0,1)$

2. Mostre que: a) $|\operatorname{sen} x - x| \leq \dfrac{1}{3!}|x|^3 \quad \forall x \in \boldsymbol{R}$

   b) $0 \leq e^x - \left(1 + x + \dfrac{1}{2}x^2\right) < \dfrac{1}{2}x^3$ para $0 \leq x \leq 1$.

3. Encontre o polinômio de Taylor de ordem 5 de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em volta de $x_0 = 1$.

4. a) Seja n natural ímpar. Mostre que para todo $x \in \boldsymbol{R}$

$$\left|\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!}\right)\right| \leq \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}$$

   b) Avalie sen (1) com erro, em módulo, inferior a 10^{-5}.

5. a) Determine o polinômio de Taylor de ordem n de $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$.

   b) Avalie e com erro em módulo inferior a 10^{-5}.

   c) Mostre que para todo $x \in \boldsymbol{R}$,

$$\left|e^{x^2} - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + ... + \frac{x^{2n}}{n!}\right)\right| \leq \frac{e^{x^2} x^{2n+2}}{(n+1)!}$$

   d) Avalie $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2} dx$ com erro inferior a 10^{-5}.

6. Mostre que $\left| \displaystyle\int_0^1 \cos(x^2)dx - \left(1 - \frac{1}{5.2!} + \frac{1}{9.4!} - \frac{1}{13.6!}\right)\right| \leq \dfrac{1}{15.7!}$

7. Seja I um intervalo aberto e seja $f : I \subset \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ derivável até 2ª ordem em I. Use o polinômio de Taylor de grau 1 e a fórmula de Taylor para provar o “teste da segunda derivada”, isto é, prove que se $a \in I$ é um ponto crítico de f e

   a) Se $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, então f tem mínimo em a.

   b) Se $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in I$, então f tem máximo em a.

V - Miscelânea

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e periódica de período $2L$, isto é, $f(x+2L) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Sejam $n \in \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{R}$. Mostre que
$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx = \frac{1}{L}\int_{a}^{a+2L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx.$$

2. Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x\,\cos x}{x+1}\,dx$ em termos de $A = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2}\,dx$.

3. *Trabalho.* Quando uma **força constante** de intensidade F é aplicada na direção do movimento de um objeto e esse objeto é deslocado de uma distância d, definimos o **trabalho** W realizado pela força sobre o objeto por $W = F.d$, se a força age no sentido do movimento e por $W = -F.d$, se ela age no sentido oposto. Suponha agora que um objeto está se movendo na direção positiva ao longo do eixo x, sujeito a uma **força variável** $F(x)$. Defina o trabalho W realizado pela força sobre o objeto quando este é deslocado de $x = a$ até $x = b$, e encontre uma fórmula para calculá-lo.

4. *Energia cinética.* Use as notações do exercício anterior, a segunda lei de Newton e a regra da cadeia
$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$
para mostrar que o trabalho realizado por uma força F atuando sobre uma partícula de massa m que se moveu de x_1 até x_2 é
$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2,$$
onde v_1 e v_2 são as velocidades do corpo em x_1 e x_2. Em Física, a expressão $\frac{1}{2}mv^2$ é chamada de **energia cinética** de um corpo em movimento com velocidade v. Portanto, o trabalho realizado por uma força é igual à variação da energia cinética do corpo e podemos determinar o trabalho calculando esta variação.

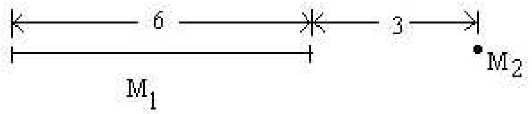
5. Suponha que uma partícula se desloca ao longo do eixo $0x$, segundo uma função horária $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ e sob ação de uma força $f(x)\,\overrightarrow{i}$, dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Admita que a dinâmica da partícula é governada por um modelo relativístico: sua massa m depende da sua velocidade v, segundo a função $m : (-c, c) \to \mathbb{R}$ definida por (dados $c > 0$ velocidade da luz e $m_0 > 0$ massa de repouso):
$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$
e sua função horária x satisfaz a equação diferencial:
$$\frac{d}{dt}\big(m(x'(t))x'(t)\big) = f\big(x(t)\big).$$
Mostre que, se interpretarmos o trabalho $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$ realizado pela força f quando a partícula se desloca de $x_0 = x(t_0)$ a $x_1 = x(t_1)$ como variação de energia ΔE, e se $\Delta m = m\big(x'(t_1)\big) - m\big(x'(t_0)\big)$, então:
$$\Delta E = \Delta m\, c^2.$$

Sugestão: Use o teorema de mudança de variáveis na integral de Riemann e o teorema fundamental do cálculo.

6. Sabe-se que a intensidade da força de atração entre duas partículas é dada por

$$F = \frac{Cm_1m_2}{d^2}$$

onde C é uma constante, m_1 e m_2 são as massas das partículas e d é a distância entre elas. Uma barra linear homogênea de massa $M_1 = 18kg$ e uma massa pontual $M_2 = 2kg$ estão dispostas como na figura. Calcule a intensidade da força de atração entre as duas massas.



7. Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n}\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{n} + \text{sen}\,\frac{2\pi}{n} + \cdots \text{sen}\,\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$

8. Determine o volume da intersecção de dois cilindros, ambos de raio R e cujos eixos são ortogonais.

9. Seja $G(x) = \int\limits_0^x \left(t\int\limits_0^t e^{u^2}\,du\right)dt$. Calcule $G'(x)$ e $G''(x)$.

10. Calcule o comprimento da astróide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

11. Calcule o comprimento do arco da curva $f(x) = -\sqrt{a^2-x^2} + a\ln(\frac{x}{a-\sqrt{a^2-x^2}})$ no intervalo fechado $[c_0, c_1] \subset]0, a[$ (suponha $a > 0$).

12. Seja $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt,\ x \in \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que f é crescente e ímpar.

   (b) Mostre que $f(x) \le f(1) + 1 - \frac{1}{x}$, $\forall x \ge 1$. (Sugestão: Integre $0 \le \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \le \frac{1}{t^2}$ de 1 a x.)

   (c) Mostre que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existe e é um número real positivo.

   (d) Esboce o gráfico de $f(x)$, localizando seu ponto de inflexão.

13. Estude as seguintes integrais de Riemann impróprias:

   (a) $\int_0^1 \ln(x)\,dx$ (b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ (c) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$

RESPOSTAS

I - Integrais Indefinidas

1) $\frac{x^6}{6} + x - \frac{1}{x} + k$
2) $\frac{e^{2x}}{2} + k$
3) $\frac{1}{7}\text{sen}\,7x + k$
4) $\text{tg}x - x + k$
5) $7\ln|x-2| + k$
6) $\frac{1}{4}\text{tg}^4x + k$
7) $2\sqrt{\cos x}(\frac{1}{5}\cos^2 x - 1) + k$
8) $-\ln|\cos x| + k$
9) $\frac{1}{2}\text{tg}^2x + \ln|\cos x| + k$
10) $\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + k$
11) $\frac{1}{2}\,\text{arctg}\,x^2 + k$
12) $x - \text{arctg}\,x + k$
13) $-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + k$
14) $\ln|\sec x + \text{tg}x| + k$
15) $2\sqrt{1+\ln x} + k$
16) $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+1)^6} + k$
17) $\ln(2x^2+8x+20) + k$
18) $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + k$
19) $\ln|\text{arcsen}\,x| + k$
20) $\ln(1+e^x) + k$
21) $-\ln(1+\cos^2 x) + k$
22) $\frac{1}{3}e^{x^3} + k$

23) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\mathrm{e}^x)^4}+k$

24) $-2\cos\sqrt{x}+k$

25) $\mathrm{e}^{\mathrm{arctg} x}+k$

26) $2(x+1)^{2015}(\frac{x+1}{2016}-\frac{1}{2015})+k$

27) $-x\cos x+\operatorname{sen} x+k$

28) $\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\operatorname{sen} x+\cos x)+k$

29) $\begin{cases} \frac{x^{r+1}}{r+1}\ln x-\frac{x^{r+1}}{(r+1)^2}+k, \text{ se } r\neq -1 \\ \frac{1}{2}(\ln x)^2+k, \text{ se } r=-1 \end{cases}$

30) $x(\ln x)^2-2(x\ln x-x)+k$

31) $(-x-1)\mathrm{e}^{-x}+k$

32) $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+k$

33) $x\operatorname{arcsen} x+\sqrt{1-x^2}+k$

34) $\frac{1}{2}\sec x\operatorname{tg} x+\frac{1}{2}\ln\sec x+\operatorname{tg} x|+k$

35) $\frac{1}{2}(x+\operatorname{sen} x\cos x)+k$

36) $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x-\frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x+k$

37) $\frac{1}{8}(x-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x)+k$

38) $\ln|1+\operatorname{sen} x|+k$

39) $6\ln|x-1|-25\ln|x-2|+22\ln|x-3|+k$

40) $\frac{\sqrt{6}}{12}\operatorname{arctg}(\frac{x+2}{\sqrt{6}})+k$

41) $-22\ln|x-1|+\frac{12}{x-1}+25\ln|x-2|+k$

42) $\frac{x^3}{3}+\frac{35}{12}\ln|x-2|+\frac{61}{24}\ln(1+(\frac{x+1}{\sqrt{3}})^2)+\frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}(\frac{x+1}{\sqrt{3}})+k$

43) $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+k$

44) $\frac{x}{8}(2x^2-1)\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{8}\operatorname{arcsen} x+k$

45) $2(\sqrt{x}-1)\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+k$

46) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+k$

47) $\ln|\sqrt{5-2x+x^2}+x-1|+k$

48) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x-\frac{2}{3})+k$

49) $\frac{x}{2}(\operatorname{sen}(\ln x)-\cos(\ln x))+k$

50) $\frac{1}{2}\ln|x^2-4|+k$

51) $2\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\frac{x+1}{\sqrt{2}})+k$

52) $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+b^2x^2}+\frac{a^2}{2b}\ln(bx+\sqrt{a^2+b^2x^2})+k$

53) $\frac{1}{b}\ln(\frac{bx}{a}+\frac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a})+k$

54) $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2}+\frac{1}{2}\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2})$ +k

55) $\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\operatorname{arcsen}(\frac{x+1}{2})+k$

56) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}})+k$

57) $\operatorname{sen} x-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x+k$

58) $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+k$

59) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x-\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x}-2\ln|\operatorname{sen} x|+k$

60) $\frac{1}{4}\cos^8(\frac{x}{2})-\frac{1}{3}\cos^6(\frac{x}{2})+k$

61) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+3\ln|\operatorname{tg} x|-\frac{3}{2\operatorname{tg}^2 x}-\frac{1}{4\operatorname{tg}^4 x}+k$

62) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)+\frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x)+k$

63) $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x-\frac{2}{5}\operatorname{sen}^5 x+\frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x+k$

64) $\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\operatorname{sen}(4x)+\frac{1}{48}\operatorname{sen}^3(2x)+k$

65) $\frac{5}{16}x+\frac{1}{12}\operatorname{sen}(6x)+\frac{1}{64}\operatorname{sen}(12x)-\frac{1}{144}\operatorname{sen}^3(6x)+k$

66) $-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x-\frac{1}{5}\operatorname{cotg}^5 x+k$

67) $\operatorname{tg} x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-2\operatorname{cotg}(2x)+k$

68) $\operatorname{arcsen} x+\sqrt{1-x^2}+k$

69) $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+k$

70) $\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{16x}-\frac{1}{32}\ln(x^2+4)-\frac{3}{64}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{4-x}{32(x^2+4)}+k$

71) $\frac{-\operatorname{arctg} x}{x}+\ln|x|-\ln\sqrt{1+x^2}+k$

72) $\frac{3}{2}\operatorname{arcsen}(x-1)-\left(\frac{x+3}{2}\right)\sqrt{2x-x^2}+k$

73) $2\ln|x+1|+\ln(x^2-2x+2)+\operatorname{arctg}(x-1)+k$

74) $x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+k$

75) $-\frac{\ln(x+1)}{x}+\ln|x|-\ln(x+1)+k$

76) $-\frac{1}{3}(x^3+1)\mathrm{e}^{-x^3}+k$

77) $\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{4x}-\frac{1}{8}\ln(x^2+4)-\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+k$

78) $\frac{1}{6}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right)-\frac{\sqrt{x^2-9}}{2x^2}+k$

II - Aplicações da Integral Definida

1. 0.
3. $\frac{128}{105}a^3$.
4. $\ln(1+\sqrt{2})$.
5. $\frac{24}{5}\sqrt{3}$.
6. πab.
7. (a) $\frac{10\sqrt{5}-2}{3}\pi$.
   (b) $\frac{\pi}{6}$.
   (c) $\frac{\pi}{2}(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-2})^2$.
   (d) $\frac{5\pi}{6}$.
8. $\pi\left[\int_0^1(\mathrm{e}^x+2)^2dx-\int_0^1\ln^2(x+1)dx\right]$
9. $\frac{32}{3}\pi$.
11. $(2\pi b)(\pi a^2)$.
12. $\pi h^2(a-\frac{h}{3})$.
13. $\operatorname{senh}4+\operatorname{senh}3$.

III - Aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo

3. $2F(2)-\frac{26}{9}$.
5. 0.
6. $\frac{\pi}{2}$.

V - Miscelânea

2. $\frac{1}{2}(\frac{1}{\pi+2}+\frac{1}{2}-A)$.
6. $\frac{4}{3}C$
8. $\frac{16}{3}R^3$.
9. $G'(x)=x\int_0^x \mathrm{e}^{u^2}du$,
   $G''(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{u^2}du+x\mathrm{e}^{x^2}$.
10. $6a$.
11. $a\ln(\frac{c_1}{c_0})$.
13. (a) -1 (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) 1