Questão 1. Calcule o limite ou justifique porque não existe:

a) (1,0 ponto) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x + 4\operatorname{sen} x}{x\sqrt{x}\operatorname{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}$

b) (1,0 ponto) $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x^2-3x} - \dfrac{x+1}{x-3}\right)$

c) (1,0 ponto) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^6+2} - \sqrt{4x^6+3x^3-5}\right)$

a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x+4\operatorname{sen}x}{x\sqrt{x}\operatorname{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x\sqrt{x}\operatorname{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)} + \dfrac{4\operatorname{sen}x}{x\sqrt{x}\operatorname{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \dfrac{3}{\sqrt{x}\operatorname{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)} + \left(\dfrac{1}{x}\operatorname{sen}x\right)\left(\dfrac{4}{\sqrt{x}\operatorname{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}\right) = (*)$

Note que:

(i) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\operatorname{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2\operatorname{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)} = 2$ onde foi utilizado o limite fundamental, uma vez que $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) = 0$

(ii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\operatorname{sen}x = 0$ pelo corolário do Teorema do Confronto, pois $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ & $|\operatorname{sen}x| \leq 1$ (limitado)

(iii) Usando (i) & (ii) obtemos

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\operatorname{sen}x\right)\left(\dfrac{4}{\sqrt{x}\operatorname{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}\right) = 0\cdot 2 = 0$

$\Rightarrow (*) = \dfrac{3}{2} + 0 = \boxed{\dfrac{3}{2}}$

b) $\lim_{x \to 3} \left(\frac{1}{x^2 - 3x} - \frac{x+1}{x-3} \right) = \lim_{x \to 3} \frac{1 - x^2 - x}{x(x-3)}$

Note que

$\lim_{x \to 3} 1 - x^2 - x = -11$ (negativo)

$\lim_{x \to 3^+} x(x-3) = 0^+$ (tende à zero por valores positivos)

$\lim_{x \to 3^-} x(x-3) = 0^-$ (tende à zero por valores negativos)

Logo,

$\lim_{x \to 3^+} \left(\frac{1}{x^2 - 3x} - \frac{x+1}{x-3} \right) = -\infty$

$\lim_{x \to 3^-} \left(\frac{1}{x^2 - 3x} - \frac{x+1}{x-3} \right) = +\infty$

$\Rightarrow$ O limite não existe pois os limites laterais são diferentes

c) $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{4x^6 + 2} - \sqrt{4x^6 + 3x^3 - 5} \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^6+2} - \sqrt{4x^6 + 3x^3 - 5}\right)\left(\sqrt{4x^6+2} + \sqrt{4x^6+3x^3-5}\right)}{\left(\sqrt{4x^6+2} + \sqrt{4x^6+3x^3-5}\right)}$

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^6 + 2 - \cancel{4x^6} - 3x^3 + 5}{\sqrt{4x^6 + 2} + \sqrt{4x^6 + 3x^3 - 5}} = \frac{x^3 \left(-3 + 7/x^3 \right)}{|x^3| \left(\sqrt{4 + 2/x^6} + \sqrt{4 + 3/x^3 - 5/x^6} \right)} = (*)$

Note que:

(i) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{|x^3|} = -1$

(ii) $\lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^n} = 0 \quad (n \geq 1)$

$\Rightarrow \boxed{(*) = \frac{3}{4}}$