Questão 2. (3,5 pontos) Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x^2-3x}\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right)}{3+\operatorname{arctg} x}, & \text{se } x \neq 3 \\ 1, & \text{se } x = 3 \end{cases}$

a) Determine todos os pontos em que f não é contínua. Justifique.

b) Determine todos os pontos em que f não é derivável. Justifique.

c) Calcule a derivada de f nos pontos em que f é derivável.

a) Se $x \neq 3$, f é contínua (quociente, produto e composta de funções contínuas é contínua.

Para $x=3$:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \underbrace{\underbrace{\sqrt[3]{x^2-3x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right)}_{\text{limitada}}}_{\to 0} \underbrace{\frac{1}{3+\operatorname{arctg} x}}_{\to \frac{1}{3+\operatorname{arctg} 3}} = 0 \neq f(3).$$

Logo, f não é contínua para $x=3$

b) Se $x \neq 0$ e $x \neq 3$, f é derivável (quociente, produto e composta de funções deriváveis)

Em $x=3$ f não é derivável pois f não é contínua

Em $x=0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x(x-3)}\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right)}{x\,(3+\operatorname{arctg} x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\sqrt[3]{x-3}}^{\sqrt[3]{-3}}}{\underbrace{\sqrt[3]{x^2}}_{\to 0(>0)}} \frac{\overbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right)}^{\operatorname{sen}\left(-\frac{1}{3}\right)}}{\underbrace{(3+\operatorname{arctg} x)}_{\to 3}} = +\infty$$

Logo, f não é derivável em $x=0$ e em $x=3$.

c) Se $x \neq 0$ e $x=3$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2x-3}{3\sqrt[3]{(x^2-3x)^2}}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right) + \sqrt[3]{x^2-3x}\cos\left(\frac{1}{x-3}\right)\left(-\frac{1}{(x-3)^2}\right)\right)(3+\operatorname{arctg} x) - \sqrt[3]{x^2-3x}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right)\cdot\frac{1}{1+x^2}}{(3+\operatorname{arctg} x)^2}$$