Questão 2. (3,5 pontos) Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x^2-2x}\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right)}{4+\operatorname{arctg} x}, & \text{se } x \neq 2 \\ 1, & \text{se } x = 2 \end{cases}$

a) Determine todos os pontos em que f não é contínua. Justifique.

b) Determine todos os pontos em que f não é derivável. Justifique.

c) Calcule a derivada de f nos pontos em que f é derivável.

a) Se $x \neq 2$, f é contínua (quociente, produto e composta de funções contínuas é contínua)

Para $x=2$:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{\overbrace{\underbrace{\sqrt[3]{x^2-2x}}_{\to 0}\ \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right)}_{\text{limitado}}}^{\to 0}}{\underbrace{4+\operatorname{arctg} x}_{\to 4+\operatorname{arctg} 2}} = 0 \neq f(2).$$

Logo, f não é contínua em $x=2$.

b) Se $x \neq 0$ e $x \neq 2$, f é derivável (quociente, produto e composta de funções deriváveis

Em $x=2$, f não é derivável pois f não é contínua

Em $x=0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\sqrt[3]{x-2}}^{\to \sqrt[3]{-2}}\ \overbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right)}^{\to \operatorname{sen}\left(-\frac{1}{2}\right)}}{\underbrace{\sqrt[3]{x^2}}_{\to 0\,(>0)}\ \underbrace{(4+\operatorname{arctg} x)}_{\to 4}} = +\infty$$

Logo, f não é derivável em $x=0$ e em $x=2$

c) Se $x \neq 0$ e $x \neq 2$:

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2x-2}{3\sqrt[3]{x^2-2x}}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right) + \sqrt[3]{x^2-2x}\cos\left(\frac{1}{x-2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right)\right)(4+\operatorname{arctg} x) - \sqrt[3]{x^2-2x}\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right)\cdot\frac{1}{1+x^2}}{(4+\operatorname{arctg} x)^2}$$