Questão 3. (2,0 pontos) Sejam $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$, e $g(x) = 7 - 5\,\mathrm{sen}\,x$. Determine a, b e c sabendo que f e g possuem mesma reta tangente no ponto de abscissa 0 e que o ponto $(0, -1)$ pertence à reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 2.

Como f e g possuem mesma reta tangente no ponto de abscissa 0,

temos que $f(0) = g(0)$ e $f'(0) = g'(0)$.

Mas $g(0) = 7$ e $f(0) = c$. Logo, $c = 7$

$g'(x) = -5\cos x$ e, portanto, $g'(0) = -5$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ e, portanto, $f'(0) = b$

Temos então que $b = -5$ e $f(x) = x^3 + ax^2 - 5x + 7$.

Daí, a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 2

tem equação $y - f(2) = f'(2)(x-2)$, ou seja,

$$y - (4a+5) = (4a+7)(x-2)$$

Como o ponto $(0,-1)$ pertence a essa reta, temos que

$$-1 - (4a+5) = (4a+7)\cdot(-2)$$

donde segue que $a = -2$.

Temos portanto que $a = -2$, $b = -5$ e $c = 7$.