

Questão 2 (Valor: 1.5 pontos). Mostre que  $\frac{\arctan(x)}{x} \leq 1$ , para todo  $x > 0$ .

A função  $f(x) = \arctan(x)$  é derivável (e portanto contínua) em  $\mathbb{R}$ .

Para cada  $x > 0$  posso aplicar o T.V.M. para a função  $f$  no intervalo  $[0, x]$  e obtenho:

$\exists \bar{x} \in ]0, x[$  tal que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\bar{x})$$

Como  $f'(\bar{x}) = \frac{1}{1+(\bar{x})^2} < 1$ ,  $\forall \bar{x}$ , e  $f(0) = 0$

sei que  $\frac{f(x)}{x} < 1$ , ou seja,

$$\frac{\arctan(x)}{x} < 1, \forall x > 0.$$

~~obs~~