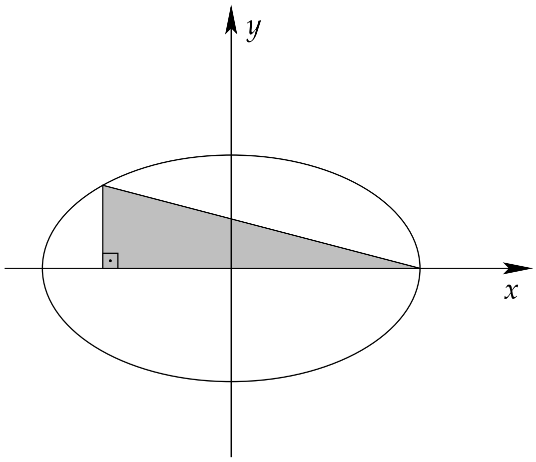
MAT-2453 — 2014 — Gabarito 2ª Prova

Questão 3 (Valor: 2.5 pontos)**.** Considere a elipse de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ e todos os triângulos retângulos construídos com um dos vértices em $(5,0)$, um sobre a elipse e o terceito sobre o eixo Ox, como na figura abaixo. Justifique a existência, dentre esses triângulos, de um com área máxima e determine as medidas de sua base e sua altura.



Solução. Denotando por $(x,0)$ as coordenadas do vértice móvel sobre o eixo Ox, temos que a base do triângulo mede $b = 5 - x$, com $-5 \leq x \leq 5$.

A altura h do triângulo é, para cada x descrita acima, o número $y \geq 0$ tal que $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, ou seja, $h = \frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$.

Deste modo a área do triângulo, em termos de x, é dada por

$$A(x) = \frac{bh}{2} = \frac{3}{10}(5 - x)\sqrt{25 - x^2}, \text{ com } -5 \leq x \leq 5.$$

A função $A(x)$ atinge valor máximo e mínimo, pois é contínua e está definida num intervalo fechado. Os candidatos a ponto de máximo ou mínimo são os extremos do intervalo $[-5,5]$ e os pontos críticos em seu interior, os quais são as soluções de $A'(x) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 = A'(x) &= \frac{3}{10}\left[-\sqrt{25 - x^2} - \frac{x(5 - x)}{\sqrt{25 - x^2}}\right] \\ &= \frac{3}{10}\left[\frac{2x^2 - 5x - 25}{\sqrt{25 - x^2}}\right]. \end{aligned}$$

Logo, $A'(x) = 0$, com $x \in]-5,5[$ se e somente se $x = -\frac{5}{2}$. Para verificar que este ponto crítico é um ponto de máximo local podemos utilizar o teste da segunda derivada (muito trabalho!) ou analisar o sinal de $A'(x)$ numa vizinhança de $x = -\frac{5}{2}$ o que, neste caso, é bem mais simples:

- se $-5 < x < -\frac{5}{2}$ temos $A'(x) > 0$, e
- se $-\frac{5}{2} < x < 5$ temos $A'(x) < 0$.

Portanto $x = -\frac{5}{2}$ é máximo local, com $A\left(\frac{-5}{2}\right) = 45\frac{\sqrt{3}}{8}$. Como $A(-5) = A(5) = 0$, temos que $x = -\frac{5}{2}$ é máximo global.

Nesse caso as dimensões do triângulo são

$$b = \frac{15}{2} \quad \text{e} \quad h = 3\frac{\sqrt{3}}{2}.$$