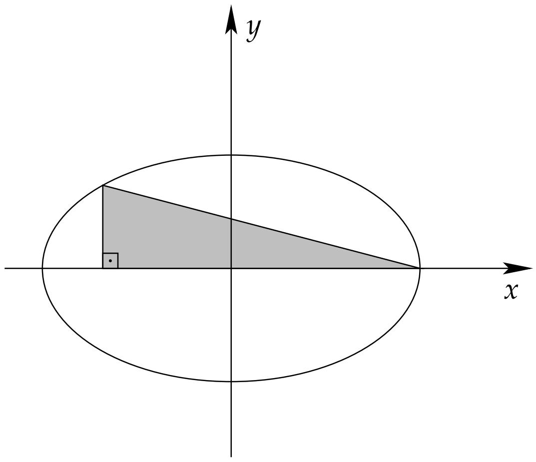
MAT-2453 — 2014 — Gabarito $2^{\underline{a}}$ Prova

Questão 3 (Valor: 2.5 pontos)**.** Considere a elipse de equação $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ e todos os triângulos retângulos construídos com um dos vértices em $(4,0)$, um sobre a elipse e o terceito sobre o eixo Ox, como na figura abaixo. Justifique a existência, dentre esses triângulos, de um com área máxima e determine as medidas de sua base e sua altura.



Solução. Denotando por $(x,0)$ as coordenadas do vértice móvel sobre o eixo Ox, temos que a base do triângulo mede $b=4-x$, com $-4\leq x\leq 4$.

A altura h do triângulo é, para cada x descrito acima, o número $y\geq 0$ tal que $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$, ou seja, $h=\dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.

Deste modo a área do triângulo, em termos de x, é dada por

$$A(x)=\frac{bh}{2}=\frac{3}{8}(4-x)\sqrt{16-x^2},\ \text{com}\ -4\leq x\leq 4.$$

A função $A(x)$ atinge valor máximo e mínimo, pois é contínua e está definida num intervalo fechado. Os candidatos a ponto de máximo ou mínimo são os extremos do intervalo $[-4,4]$ e os pontos críticos em seu interior, os quais são as soluções de $A'(x)=0$. Assim,

$$\begin{aligned}0=A'(x)&=\frac{3}{8}\left[-\sqrt{16-x^2}-\frac{x(4-x)}{\sqrt{16-x^2}}\right]\\&=\frac{3}{8}\left[\frac{2x^2-4x-16}{\sqrt{16-x^2}}\right].\end{aligned}$$

Logo, $A'(x)=0$, com $x\in]-4,4[$ se e somente se $x=-2$. Para verificar que este ponto crítico é um ponto de máximo local podemos utilizar o teste da segunda derivada (muito trabalho!) ou analisar o sinal de $A'(x)$ numa vizinhança de $x=-2$ o que, neste caso, é bem mais simples:

- se $-4<x<-2$ temos $A'(x)>0$, e
- se $-2<x<4$ temos $A'(x)<0$.

Portanto $x=-2$ é máximo local, com $A(-2)=9\frac{\sqrt{3}}{2}$. Como $A(-4)=A(4)=0$, temos que $x=-2$ é máximo global.

Nesse caso as dimensões do triângulo são

$$b=6\quad\text{e}\quad h=3\frac{\sqrt{3}}{2}.$$