(4,0) **Questão 4.** Esboce, no espaço abaixo, o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$, determinando:

i) o domínio de f e limites pertinentes;

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-1} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = [-\infty \cdot 1] = -\infty$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = [+\infty \cdot 1] = +\infty$

c) $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \frac{x^2}{x-1} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^-} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{\frac{x-1}{x^2}} \underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to0^-} \frac{\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{\frac{-x+2}{x^3}} = \lim_{x\to0^-} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{\frac{-x+2}{x}} \underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to0^-} \frac{\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{\frac{-2}{x^2}} = \lim_{x\to0^-} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{-2} = -\infty$

d) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{x^2}{x-1} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = [0 \cdot 0] = 0$

e) $\displaystyle\lim_{x\to1^-} \frac{x^2}{x-1} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \left[-\infty \cdot \frac{1}{\mathrm{e}}\right] = -\infty$

f) $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \frac{x^2}{x-1} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \left[+\infty \cdot \frac{1}{\mathrm{e}}\right] = +\infty$

ii) os intervalos de crescimento e decrescimento de f;

$$f'(x) = \left(\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} + \frac{x^2}{x^2(x-1)}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \frac{x^2-x-1}{(x-1)^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.$$

$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	f
$+$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$+$	x^2-x-1
$+$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$+$	f'
	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		

$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ é um ponto de máximo local e $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é um ponto de mínimo local de f.

Temos que $f(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) < -1$ e $f(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) > 2$.

iii) concavidades e pontos de inflexão, sabendo-se que $f''(x) = \dfrac{x^2+1}{(x-1)^3x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$;

$\cap$		$\cap$		$\cup$	f
$-$	|	$-$	|	$+$	$x-1$
$-$	|	$-$	|	$+$	f'
	0		1		

f não admite ponto de inflexão.

iv) assíntotas, se existirem.

a) Temos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2}{x^2-x} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = [1 \cdot 1] = 1 = m.$

e $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 1x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} - x \right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 e^{-\frac{1}{x}} - x^2 + x}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}} - 1 + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}$

$\underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{-1 + \frac{2}{x}} = 0 = n.$

Portanto, $y = 1x + 0$ é uma assíntota oblíqua (para $x \to +\infty$).

b) Analogamente, temos que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2}{x^2-x} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = 1 = m.$

e $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - 1x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} - x \right) = 0 = n.$

Portanto, $y = 1x + 0$ é uma assíntota oblíqua (para $x \to -\infty$).

c) Como $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = -\infty$, então $x = 0$ é uma assíntota vertical.

d) Como $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = -\infty$, então $x = 1$ é uma assíntota vertical.

e) Como $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$, então $x = 1$ é uma assíntota vertical.

f) Como existem assíntotas oblíquas, não existem assíntotas horizontais.

v) Portanto, o gráfico de f é: