(4,0) **Questão 4.** Esboce, no espaço abaixo, o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}e^{\frac{1}{x}}$, determinando:

i) o domínio de f e limites pertinentes;

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = [-\infty \cdot 1] = -\infty$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = [+\infty \cdot 1] = +\infty$

c) $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \frac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = [0 \cdot 0] = 0$

d) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{x+1}{x^2}} \underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{\frac{-x-2}{x^3}} = \lim_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{x+2}{x}} \underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{\frac{-2}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2} = +\infty$

e) $\displaystyle\lim_{x\to-1^-} \frac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = \left[-\infty \cdot \frac{1}{e}\right] = -\infty$

f) $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} \frac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = \left[+\infty \cdot \frac{1}{e}\right] = +\infty$

ii) os intervalos de crescimento e decrescimento de f;

$$f'(x) = \left(\frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} - \frac{x^2}{x^2(x+1)}\right)e^{\frac{1}{x}} = \frac{x^2+x-1}{(x+1)^2}e^{\frac{1}{x}}.$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\nearrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \nearrow & & f \\
\hline\hline
+ & | & - & | & - & | & - & | & + & & x^2+x-1 \\
\hline\hline
+ & | & - & | & - & | & - & | & + & & f' \\
\hline
 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & & -1 & & 0 & & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & & &
\end{array}$$

$x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ é um ponto de máximo local e $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ é um ponto de mínimo local de f.

Temos que $f(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}) < -2$ e $f(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}) > 1$.

iii) concavidades e pontos de inflexão, sabendo-se que $f''(x) = \dfrac{x^2+1}{(x+1)^3x^2}e^{\frac{1}{x}}$;

$$\begin{array}{ccccccc}
\cap & & \cup & & \cup & & f \\
\hline\hline
- & | & + & | & + & & x+1 \\
\hline\hline
- & | & + & | & + & & f' \\
\hline
 & -1 & & 0 & & &
\end{array}$$

f não admite ponto de inflexão.

iv) assíntotas, se existirem.

a) Temos que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2}{x^2+x} \cdot e^{\frac{1}{x}} = [1 \cdot 1] = 1 = m.$

e $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 1x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2 - x}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$

$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{-e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{1 + \frac{2}{x}} = 0 = n.$

Portanto, $y = 1x + 0$ é uma assíntota oblíqua (para $x \to +\infty$).

b) Analogamente, temos que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2}{x^2+x} \cdot e^{\frac{1}{x}} = 1 = m.$

e $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - 1x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} - x \right) = 0 = n.$

Portanto, $y = 1x + 0$ é uma assíntota oblíqua (para $x \to -\infty$).

c) Como $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, então $x = 0$ é uma assíntota vertical.

d) Como $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = -\infty$, então $x = -1$ é uma assíntota vertical.

e) Como $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, então $x = -1$ é uma assíntota vertical.

f) Como existem assíntotas oblíquas, não existem assíntotas horizontais.

v) Portanto, o gráfico de f é: