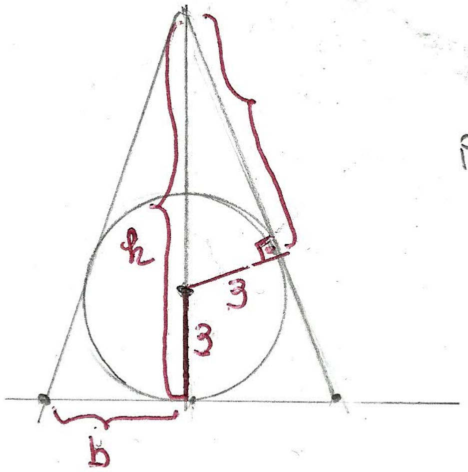
4. **(2,0)** Dentre todos os triângulos isósceles circunscritos a um círculo de raio 3 existe um cuja área é máxima? E mínima? Se sim, qual é essa área? **Justifique.**



$A = b\,h$

Por semelhança de triângulos temos que $\dfrac{b}{h} = \dfrac{3}{\sqrt{(h-3)^2-3^2}}$

Assim

$$b = \frac{3h}{\sqrt{h^2-6h}}$$

A área em função de h é

$A(h) = \dfrac{3h^2}{\sqrt{h^2-6h}}$. O problema faz sentido se $h^2-6h>0$, $h>0$, ou seja se $h>6$

Temos então que estudar a função $A(h) = \dfrac{3h^2}{\sqrt{h^2-6h}}$ no intervalo $]6,+\infty[$

$\lim_{x\to 6^+} A(h) = +\infty$ $\qquad \lim_{h\to+\infty} A(h) = +\infty$

$$A'(h) = \frac{6h\left(\sqrt{h^2-6h}\right) - 3h^2\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(h^2-6h)^{-1/2}\cdot(\cancel{2}h-\cancel{6}\,3)}{h^2-6h}$$

$$= \frac{6h(h^2-6h)-3h^2(h-3)}{(h^2-6h)^{3/2}} = \frac{3h^3-27h^2}{(h^2-6h)^{3/2}}$$

$$= \frac{3h^2}{(h^2-6h)^{3/2}}\cdot(h-9)$$

	6		9	
$A'(h)$		$- - -$		$+ + + +$
$A(h)$		↘		↗

A função $A(h)$ não tem máximo em $]6,+\infty[$.

A área é mínima no ponto $h=9$.

$\boxed{\text{Área MÍNIMA: } 81/\sqrt{3}}$

Não tem área máxima pois se $h\to 6^+$ ou $h\to+\infty$, tem-se que $A(h)\to+\infty$.

(ou) Se existisse o máximo de $A(h)$ em $]6,+\infty[$, existiria outro ponto crítico de $A(h)$ em $]6,+\infty[$. Só que existe um único ponto crítico e ele é ponto de mínimo local.