Questão 1. (2,0 pontos) Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+9x^2)}{\text{arctg}(3x)}, & \text{se } x \neq 0 \\ L, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

a) Determine L, sabendo que f é contínua no ponto $x = 0$.

b) É f derivável no ponto $x = 0$? Se for, calcule $f'(0)$.

a) Para que f seja contínua em $x=0$, devemos ter

$$L = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+9x^2)}{\text{arctg}(3x)} \underset{(\frac{0}{0})}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+9x^2}\cdot 18x}{\frac{1}{1+9x^2}\cdot 3} = \lim_{x\to 0} 6x = 0$$

Portanto, $L=0$

b) f é derivável em $x=0$ se existir $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

Pela parte a), $f(0)=0$.

Então

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+9x^2)}{x\,\text{arctg}(3x)} \underset{(\frac{0}{0})}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+9x^2}\cdot 18x}{\text{arctg}(3x) + \frac{3x}{1+9x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{18x}{(1+9x^2)\text{arctg}(3x)+3x} \underset{(\frac{0}{0})}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{18}{18x\,\text{arctg}(3x) + \cancel{(1+9x^2)}\cdot\frac{1}{\cancel{1+9x^2}}\cdot 3 + 3} = \frac{18}{6} = 3$$

Logo, f é derivável em $x=0$ e $f'(0)=3$.