Questão 1. (2,0 pontos) Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+4x^2)}{\operatorname{arctg}(2x)}, & \text{se } x \neq 0 \\ L, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

a) Determine L, sabendo que f é contínua no ponto $x = 0$.

b) É f derivável no ponto $x = 0$? Se for, calcule $f'(0)$.

a) Para que f seja contínua em $x=0$, devemos ter

$$L = f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+4x^2)}{\operatorname{arctg}(2x)} \underset{(\frac{0}{0})}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+4x^2} \cdot 8x}{\frac{1}{1+4x^2} \cdot 2} = \lim_{x\to 0} 4x = 0.$$

Portanto, $L = 0$.

b) f é derivável em $x=0$ se existir $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

Pelo item a), $f(0)=0$. Então

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+4x^2)}{x\operatorname{arctg}(2x)} \underset{(\frac{0}{0})}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+4x^2} \cdot 8x}{\operatorname{arctg}(2x) + \frac{2x}{1+4x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{8x}{(1+4x^2)\operatorname{arctg}(2x) + 2x} \underset{(\frac{0}{0})}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{8}{8x\operatorname{arctg}(2x) + (1+4x^2)\cdot\frac{1}{1+4x^2}\cdot 2 + 2} = \frac{8}{4} = 2.$$

Logo, f é derivável em $x=0$ e $f'(0) = 2$.