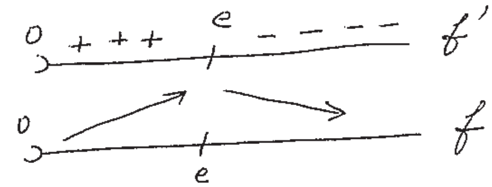
Questão 2 - A

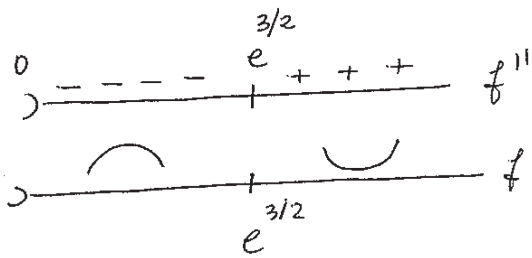
a) Domínio de $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$



f é crescente em $]0, e]$ e decrescente em $[e, +\infty[$.

$$f''(x) = \frac{\left(-\frac{1}{x}\right) \cdot x^2 - (1 - \ln x) 2x}{x^4} = \frac{(2 \ln x - 3)}{x^3} \quad (x > 0)$$



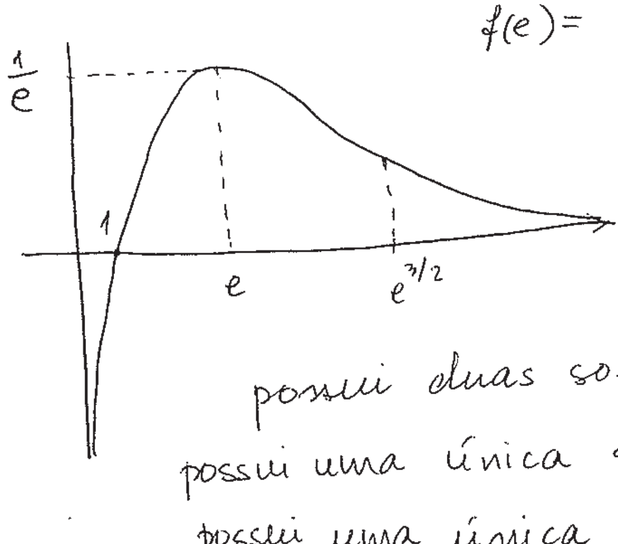
$e^{3/2}$ é um ponto de inflexão

limites pertinentes:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\uparrow +\infty} \cdot \underbrace{\ln x}_{\uparrow -\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{L'Hospital} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$



b) Como $x > 0$, $\ln x = kx \iff \frac{\ln x}{x} = k$. Do gráfico, se $0 < k < 1/e$, $f(x) = k$ possui duas soluções. Se $k = 1/e$, $f(x) = k$ possui uma única solução e, se $k < 0$, $f(x) = k$ possui uma única solução.